N° d'ordre : 13

THÈSES

PRESENTEES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE BESANÇON

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Marcel OLIVIER

Licencié ès Sciences
Docteur en Métrologie

PREMIERE THESE

ANALYSEUR DE SPECTRES A MASER

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE

Soutenues le 30 octobre 1964, devant la Commission d'Examen

MM.	A. KASTLER	Président
	P. GRIVET	Examinateurs
	P. MESNAGE	
	J. UEBERSFELD	

N° d'ordre : 13

THÈSES

PRESENTEES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE BESANÇON

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Marcel OLIVIER

Licencié ès Sciences
Docteur en Métrologie

PREMIERE THESE

ANALYSEUR DE SPECTRES A MASER

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE

Soutenues le 30 octobre 1964, devant la Commission d'Examen

MM. A. KASTLER — Président

P. GRIVET
P. MESNAGE
J. UEBERSFELD — Examinateurs

UNIVERSITÉ DE BESANÇON

FACULTÉ DES SCIENCES

Doyen honoraire : M. GLANGEAUD

Professeurs honoraires :

MM. BAILLAUD, R. DUFFIEUX, THIRY, TRILLAT, UEBERSFELD, VINCENSINI

Maître de conférences honoraire : M. GRANIER

Doyen : M. JACQUEMAIN, Chimie appliquée

Assesseur : M. MESNAGE, Chronométrie

Professeurs :

MM.	TRONCHET	Botanique.
	CHATELET	Mathématiques.
	PERROT	Chimie générale.
	DREYFUSS	Géologie - Minéralogie.
	THEOBALD	Paléontologie et Géologie stratigraphique.
	CROISOT	Méthodes mathématiques de la Physique.
	DELHAYE	Astronomie.
	QUANTIN	Botanique.
	CHALEAT	Mécanique appliquée.
	RIPPLINGER	Physiologie animale.
	NAHON	Mécanique générale.
	BERNARD	Chimie - Physique.
	RIGAL	Calcul numérique.
	VIENOT	Physique.
Mme	ROZIS	Physique.
MM.	THIEBAUT	Géologie - Minéralogie.

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK - LEIDEN

Professeurs sans chaire :

MM.	POTIER	Physique des Solides.
	DEVIN	Chimie générale.
	GOMOT	Zoologie.
	MOTCHANE	Electronique.

Maîtres de conférences :

MM.	VALLEE	Mathématiques appliquées.
	REAL	Zoologie.
	GOUARNE	Mathématiques.
	LEGRAND	Botanique.
	THEOBALD J.-G.	Physique P. C. B. - S. P. C. N.
	REMOND	Chargé d'enseignement de la Maîtrise de conférences de Chronométrie.

Conseiller administratif universitaire : M. LAMBERT

A mes parents

A ma femme

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547626_0036

A Monsieur le Professeur J. UEBERSFELD

Sous-Directeur du Laboratoire de l'Horloge atomique

Hommage de respectueuse gratitude

PREMIÈRE THÈSE

ANALYSEUR DE SPECTRES A MASER

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de l'Horloge Atomique du Centre National de la Recherche Scientifique. Je voudrais exprimer mes remerciements à M. le Directeur Général du Centre National de la Recherche Scientifique qui m'a autorisé à effectuer ce travail dans ce Laboratoire.

Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance à M. le Professeur Uebersfeld, Sous-Directeur du Laboratoire de l'Horloge Atomique, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris, qui, après m'avoir initié à la technique des étalons de fréquence, m'a proposé mon sujet de travail et par son aide personnelle, m'a aidé à le mener à bien.

Toute ma gratitude va aussi à M. le Professeur Mesnage, Directeur de l'Ecole Nationale Supérieure de Chronométrie et Micromécanique, qui m'a le premier donné le goût de la métrologie et qui a suivi constamment le développement de mes travaux.

Je voudrais remercier M. Kastler, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris, Directeur du Laboratoire de l'Horloge Atomique, qui a bien voulu s'intéresser à mes travaux et m'a fait l'honneur d'accepter de présider ce jury.

Je voudrais dire enfin à M. Grivet, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris, combien je lui sais gré d'avoir bien voulu accepter d'examiner ce travail où l'électronique joue un si grand rôle.

Je n'aurais garde d'oublier l'aide efficace qui m'a eté apportée par tout le personnel du Laboratoire, chercheurs et techniciens, mais je voudrais remercier particulièrement M. Grand dont le dévouement, en particulier pour la réalisation des chaînes de multiplication de fréquence, m'a été si précieux, ainsi que Mme Cuenin qui s'est acquittée si gentiment de la lourde tâche de la dactylographie de ce travail.

INTRODUCTION

La mise en œuvre des étalons atomiques et moléculaires de fréquence pour la mesure du temps, c'est-à-dire la construction d'horloges atomiques ou moléculaires, nécessite de « coupler » l'étalon de fréquence qui fonctionne généralement à très haute fréquence (région des microondes) avec un garde-temps qui est généralement une horloge à quartz, fonctionnant à une fréquence comprise entre 100 KHz et 5 MHz. La fréquence du garde temps, qui **fonctionne en permanence,** *est alors comparée périodiquement (généralement une fois par jour) à la fréquence de l'étalon atomique ou moléculaire, ce dernier fonctionnant de manière discontinue. Le laboratoire de l'Horloge Atomique du C.N.R.S. a construit des masers à ammoniac destinés à jouer le rôle d'étalons de fréquence.*

La mission nous a été confiée de réaliser les dispositifs permettant de comparer la fréquence des horloges à quartz de l'observatoire de Besançon à celle de ces masers. Dès le début de nos travaux, il nous est apparu que le signal délivré par ces horloges à quartz était impropre à une telle comparaison. La raison principale s'est révélée être le manque de pureté spectrale de ces signaux. Nous avons donc entrepris une étude systématique en vue de déterminer les conditions auxquelles doivent satisfaire les oscillateurs à quartz et aussi les chaînes de multiplication de fréquence. Autrement dit, il nous a fallu réaliser un analyseur de spectre. Le maser à ammoniac qui est un auto-oscillateur de très grande pureté spectrale peut être utilisé comme oscillateur de référence dans un analyseur de spectres de très haute résolution.

C'est la réalisation et l'utilisation d'un analyseur de spectres à maser que nous allons décrire dans notre mémoire qui comprend deux parties ; dans la première, après quelques généralités sur les spectres, l'analyse spectrale et les masers, l'analyseur de spectre et les chaînes de multiplication nécessaires sont décrits ; dans la deuxième partie, on montre comment l'analyseur de spectres permet l'étude et par suite l'amélioration des spectres obtenus en hyperfréquence par multiplication des signaux d'oscillateurs à quartz. Il permet par là même de résoudre le problème de la comparaison de fréquence entre le maser à ammoniac et les horloges à quartz.

PREMIÈRE PARTIE

CHAPITRE I. — GÉNÉRALITÉS

A. — Etude des spectres

L'analyse harmonique d'une fonction consiste à décomposer cette fonction sous la forme d'une somme de termes sinusoïdaux. En prenant la notation complexe, on pourra écrire une fonction $X(t)$ du paramètre t sous la forme suivante :

$$X(t) = \sum_f B(f) \exp j2\pi ft \qquad j = \sqrt{-1}$$

$B(f)$ étant complexe introduit l'amplitude et la phase de chacune des composantes. Le processus revient donc à la recherche de la transformée de Fourier d'une fonction. Ce problème revêt une importance considérable dans de nombreux domaines de la physique, que ce soit dans celui de l'optique où il se trouve à la base de la théorie des images (1) ou dans celui de l'électrotechnique où il rend de grands services dans la théorie des filtres.

L'intérêt principal de cette description est attaché à la théorie des transformations linéaires. On a souvent à considérer une fonction $Y(t)$ déduite de $X(t)$ par une transformation linéaire (O).

$$Y(t) = (O)X(t)$$

Ce sera par exemple la correspondance entre fonction de sortie et d'entrée d'un quadripôle linéaire. On sait (2) que les exponentielles $\exp(j^2\pi ft)$ sont les fonctions propres de telles transformations. En appliquant $X(t)$ à l'entrée d'un amplificateur linéaire on obtient, si l'on prend pour $X(t)$ la fonction $\exp(j^2\pi ft)$

$$Y(t) = (O)X(t)$$

$$\text{où } (O) \exp(j2\pi ft) = G(f) \exp(j2\pi ft)$$

La formule précédente montre que $G(f)$ est une valeur propre de la transformation (O). $G(f)$ définit le gain de l'amplificateur. L'analyse harmonique de la fonction $X(t)$ permettra d'obtenir la fonction de sortie $Y(t)$ du quadripole représenté par la transformation linéaire (O), dont on connaît le gain $G(f)$ pour chaque fréquence.

$$Y(t) = \sum_f B(f)G(f) \exp(j2\pi ft)$$

Nous avons considéré une fonction définie $X(t)$. Une classe de problèmes où l'analyse harmonique se montre intéressante concerne les problèmes où $X(t)$ se présente sous forme de fonctions aléatoires représentant un bruit auquel s'ajoute éventuellement une ou plusieurs fonctions définies. L'étude de la distribution dans le domaine des fréquences de l'énergie ou de la puissance attachée à ces fonctions conduit à des résultats fructueux. C'est l'un des aspects intéressants de l'analyse harmonique. Nous nous attacherons plus particulièrement à l'étude de la densité spectrale d'une fonction aléatoire du temps représentant la grandeur de sortie d'un oscillateur. Nous obtiendrons des renseignements concernant la monochromaticité et l'allure du spectre de bruit de l'oscillateur.

Les problèmes de bruit introduisent des fonctions aléatoires dépendant d'un paramètre t qui pour nous sera le temps. Leur caractère aléatoire est traduit de la façon suivante : à chaque valeur t_1 du paramètre t est associé, non plus une valeur définie $X(t_1)$, mais un ensemble de valeurs discrètes ou continues ; à chaque valeur est attachée une certaine probabilité. Dans le cas d'une distribution continue, nous pouvons définir les densités de probabilité suivantes :

$p_1(X, t_1)dX$ = Probabilité de trouver X dans l'intervalle $X, X + dX$ au temps t_1

$p_2(X_1, t_1, X_2, t_2)\, dX_1\, dX_2$ = Probabilité de trouver X dans l'intervalle $(X_1, X_1 + dX_1)$ au temps t_1 et dans l'intervalle $(X_2, X_2 + dX_2)$ au temps t_2

Dans le cas général, la fonction aléatoire ne peut être définie complètement que par la suite infinie des densités de probabilité $p_n[X_1(t_1)\ldots X_n(t_n)]$.

On a souvent affaire à des processus pour lesquels la connaissance de p_2 est suffisante pour déterminer complètement les propriétés statistiques de la fonction. Il s'agit alors de processus de Markoff. Les processus aléatoires gaussiens en sont un cas particulier. Les processus gaussiens, apparaissant dès que les phénomènes étudiés sont dus à l'effet d'un grand nombre de faibles actions, sont prépondérants en électronique. On postulera souvent la nature gaussienne du bruit rencontré dans ce domaine et l'étude statistique de ce bruit se limitera aux moyennes des deux premiers ordres. Nous admettrons également le caractère stationnaire des fonctions aléatoires que nous utilisons, autrement dit, les densités de probabilités seront invariantes pour tout changement de l'origine des temps. Dans ces conditions, la moyenne du premier ordre s'exprime par un nombre $<X(t)>$ qui désigne la moyenne d'ensemble effectuée sur les fonctions aléatoires. La moyenne du second ordre est traduite par la fonction d'autocorrélation qui est une fonction d'une seule variable :

$$C(\tau) = <X(t)\ X(t + \tau)>$$

Nous supposerons que les moyennes prises sur le temps ou les moyennes prises sur l'ensemble sont identiques. Ceci est réalisé pour les phénomènes physiques qui nous intéressent. C'est ce qu'on appelle quelquefois l'hypothèse d'ergodicité.

On a souvent recours à la densité spectrale de puissance dont nous approfondirons la définition. Elle présente certains avantages. En effet lorsqu'une fonction aléatoire stationnaire est appliquée à l'entrée d'un filtre linéaire, les moyennes du second ordre de la grandeur de sortie peuvent être exprimées par une transformation linéaire des valeurs correspondantes de la fonction d'entrée. Nous verrons que les transformations exprimant ces propriétés sont diagonales lorsqu'on utilise la densité spectrale de puissance. Nous devons aussi avouer que le physicien habitué à travailler dans le domaine des radiofréquences aura une prédilection pour la notation en termes de puissance spectrale. Cette formulation lui apparaîtra d'adaptation plus immédiate dans le domaine qui lui est propre, celui des fréquences.

Définition du spectre de puissance. — La densité spectrale de puissance peut être définie directement à partir de la fonction de corrélation. Nous rappellerons une définition qui met en lumière le sens physique que l'on doit accorder au spectre de puissance.

Soit $X(t)$ une fonction réelle du temps. Ce sera par exemple la tension recueillie à la sortie d'un amplificateur. Développons $X(t)$ en série de Fourier sur une période T

$$X(t) = \sum_n A_n \exp(j2\pi ft + \varphi_n)$$

La puissance instantanée dissipée par effet Joule aux bornes d'une résistance unité sera donnée par P.

$$P = X(t)^2 = [\sum_n A_n \exp(j2\pi ft + \varphi_n)]^2$$

On trouve la puissance moyenne P_T en faisant la moyenne sur la période T

$$P_T = \frac{1}{T}\int_0^T [\sum A_n \exp(j2\pi ft + \varphi_n)]^2 \, dt = \frac{1}{2}\sum_0^\infty A_n^2$$

Dans le calcul de P, on fait la somme des contributions dues à chaque fréquence. On peut donc définir une densité spectrale énergétique telle que la puissance associée à un intervalle de fréquence sera l'intégrale de la densité spectrale sur cet intervalle. On associe à la quantité $X(t)^2$ la notion de puissance instantanée même lorsqu'il ne s'agit pas de puissance au sens physique du terme. L'énergie totale associée à cette fonction sera représentée par l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(t)|^2 \, dt$ lorsque celle-ci converge.

La puissance moyenne sera la limite $\overline{P}$

$$\overline{P} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |X(t)|^2 \, dt$$

Soit $\Phi(f)$ la transformée de Fourier de $X(t)$. On utilise la formulation symétrique faisant intervenir directement la fréquence.

$$\Phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) \exp(-j2\pi ft) \, dt$$

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(f) \exp(j2\pi ft) \, df$$

($\Phi(f)$ est complexe et $\Phi(f)^* = \Phi(-f)^*$. Par suite, d'après le théorème de Parseval :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(f)^2 df = 2\int_0^\infty |\Phi(f)|^2 df$$

Considérons un intervalle de temps fini T. Nous remplaçons la fonction $X(t)$ par $X_T(t)$ définie de la façon suivante :

$$X_T(t) = X(t) \qquad |t| < \frac{T}{2}$$

$$X_T(t) = 0 \qquad |t| > \frac{T}{2}$$

Soit $\Phi_T(f)$ la transformée de Fourier de $X_T(t)$.

On considère la puissance moyenne associée à $X(t)$ pendant l'intervalle T, soit $\overline{P}_T$

$$\overline{P}_T = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} X(t)^2 dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} X_T(t)^2 dt$$

En appliquant le théorème de Parseval :

$$\overline{P}_T = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi_T(f)^2}{T} \, df = 2\int_0^\infty P_T(f) df$$

On a posé : $P_T(f) = \frac{\Phi_T(f)^2}{T}$

La puissance moyenne est l'intégrale de $P_T(f)$ prise sur les fréquences. On associe donc la notion de densité spectrale de puissance à $P(f)$, définie comme étant la limite pour $T \to \infty$ de $P_T(f)$

$$P(f) = \lim_{T \to \infty} \frac{\Phi_T(f)^2}{T} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X_T(t) \exp(-j2\pi ft)\, dt \right]^2$$

Dans le cas d'un processus aléatoire, on définit la densité spectrale de puissance comme étant la valeur moyenne de cette densité sur les fonctions du processus.

La relation entre la fonction d'autocorrélation $C(\tau)$ et le spectre de puissance $P(f)$ dont nous venons de rappeler la définition est donnée par le théorème de Wiener-Kintchine.

$$P(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\tau) \exp(-j2\pi ft) dt$$

Nous avons évidemment la forme inverse :

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(f) \exp(j2\pi f\tau) df.$$

Nous pouvons maintenant préciser les relations entre grandeurs d'entrée et de sortie d'un filtre linéaire auquel on applique une fonction $X(t)$ représentant un processus aléatoire. Soit $W(t, \tau)$ la réponse caractéristique du système, c'est-à-dire la réponse à une impulsion unité appliquée à l'instant $t = \tau$. Si les caractéristiques de réponse du filtre sont indépendantes du temps, $W(t, \tau) = W(t, -\tau)$. En nous plaçant dans ce cas, la grandeur de sortie sera donnée par le produit de convolution de la grandeur d'entrée par la réponse caractéristique du filtre.

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(t - \tau)\, X(\tau)\, d\tau$$

On se sert le plus souvent, pour caractériser le filtre, de sa réponse en fréquence, c'est-à-dire de la grandeur de sortie correspondant à une entrée sinusoïdale.

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(t - \tau) \exp(j2\pi f\tau)\, d\tau = G(f) \exp(j2\pi ft)$$

Avec :
$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(t) \exp(-j2\pi ft)\, dt$$

$G(f)$ est le gain complexe du filtre.

La relation entre la fonction de corrélation de $Y(t)$, soit $\varphi_y(\tau)$ et celle de $X(t)$, soit $\varphi_x(\tau)$ est assez compliquée.

$$\varphi_y(\tau) = \langle Y(t)\, Y(t + \tau) \rangle$$

On obtient aisément : [3]

$$\varphi_y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(\tau_1) \int_{-\infty}^{+\infty} W(\tau_2)\, \varphi_x(\tau + \tau_1 - \tau_2)\, d\tau_2 d\tau_1$$

Le spectre de sortie du filtre, $P_y(f)$ peut être obtenu en fonction du spectre d'entrée $P_x(f)$ en utilisant le théorème de Wiener-Kintchine appliqué à $\varphi_y(\tau)$

$$P_y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_y(\tau) \exp(-j2\pi f\tau)\, d\tau$$

Après quelques transformations, on obtient le résultat suivant :

$$P_y(f) = P_x(f) \mid G(f) \mid^2$$

Le spectre de puissance de sortie est obtenu en multipliant le spectre d'entrée par le carré du module de la fonction de transfert, $\mid G(f) \mid^2$. Cette quantité est parfois appelée fonction de transfert de puissance.

On obtient en particulier le carré moyen de la grandeur de sortie :

$$\overline{Y(t)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mid G(f) \mid^2 P_y(f)\, df$$

Les considérations précédentes font intervenir une fonction $X(t)$ d'extension infinie dont on définit la densité spectrale. En fait, quelles que soient les méthodes d'analyse, on ne peut disposer que d'enregistrements de durée limitée de $X(t)$.

Il est indispensable de pouvoir relier le spectre de puissance obtenu dans ces conditions, soit $P_1(f)$, au spectre théorique $P(f)$.

Soit T_1 la durée d'analyse d'une fonction représentant un processus aléatoire. Le spectre de puissance $P_1(f)$ pourra être obtenu en faisant la moyenne des spectres sur les différents enregistrements de $X(t)$ de durée T_1. Chaque échantillon

$X_1(t)$ peut être représenté par le produit de la fonction illimitée $X(t)$ par une fonction $F(t - t')$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$$F(t - t') = 0 \qquad |\, t - t' \,| > T_1/2$$
$$F(t - t') = 1 \qquad |\, t - t' \,| < T_1/2$$

$X_1(t)$ est un échantillon situé entre $t' - T_1/2$ et $t' + T_1/2$

$$X_1(t) = F(t - t')\, X(t)$$

$$P_1(f) = \left\langle \frac{1}{T_1} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F(t - t')\, X(t) \exp(-j2\pi ft)\, dt \right]^2 \right\rangle$$

$P_1(f)$ est la transformée de Fourier de $C_1(\tau, t')$.

$$C_1(\tau, t') = \frac{1}{T_1} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t - t')\, X(t) \,.\, F(t - t' + \tau)\, X(t + \tau)\, dt$$

On remplace la moyenne d'ensemble par la moyenne sur les divers enregistrements :

$$\langle C_1(\tau) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} C(\tau, t')\, dt'$$

par suite :

$$C_1(\tau) = \frac{1}{T_1} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)X(t + \tau) \left[\int_{-T/2}^{+T/2} F(t - t')F(t - t' + \tau)dt' \right] dt$$

Ceci peut s'écrire :

$$\langle C_1(\tau) \rangle = H(\tau)\, C(\tau)$$

ou

$$H(\tau) = \frac{1}{T1} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t - t')F(t - t' + \tau)\, dt'$$

Par suite :

$$P_1(f) = Q(f) \ast P(f)$$

$Q(f)$ est la transformée de Fourier de $H(\tau)$. La définition de $H(\tau)$ permet d'obtenir, en introduisant la transformée $J(f)$ de $F(t)$:

$$P_1(f) = \frac{1}{T_1} |\, J(f) \,|^2 \ast P(f)$$

On obtient un étalement du vrai spectre de puissance par la fonction $J(f)^2$.

Nous pouvons reprendre maintenant les résultats concernant les filtres linéaires, et rechercher l'évolution du spectre de puissance d'une fonction aléatoire $X(t)$ au passage dans un tel filtre, lorsque nous appliquerons à l'entrée, pendant un temps T_1, des échantillons de $X(t)$.

On calcule la valeur moyenne, effectuée sur les différents enregistrements, du spectre de puissance de la sortie $P_{y1}(f)$. On introduit comme précédemment une fonction $F(t - t')$ ayant pour transformée de Fourier $J(f)$, et bien entendu la fonction de transfert du filtre, supposé centré sur une fréquence f_1, c'est-à-dire $G(f, f_1)$.

On obtient finalement une formule reliant le spectre de sortie $P_{y1}(f)$ au spectre d'entrée de $X(t)$, $P_x(f)$.

$$P_{y1}(f) = \frac{1}{T_1} \left[\left\{ |J(f)|^2 \ast |G(f, f_1)|^2 \right\} .\, P_x(f) \right]$$

On obtient un étalement de la fonction de transfert du filtre donné par le produit de convolution de $|G(f, f_1)|^2$ par $|J(f)|^2$.

Fréquence instantanée et spectre de fréquence. — Nous avons considéré jusqu'à présent le spectre de puissance et ses propriétés dans le cas le plus général d'un processus aléatoire quelconque $X(t)$. L'objet particulier de notre étude consiste à obtenir et étudier la densité spectrale du signal délivré par un quartz après une multiplication par un facteur très élevé. La fréquence obtenue se trouve dans la bande X des hyperfréquences. La nature du spectre obtenu permet d'obtenir des renseignements sur l'amplitude et la cause des fluctuations de fréquence du signal analysé. Celles-ci peuvent être enregistrées d'une façon indépendante. Nous sommes conduit à chercher les relations existant entre le spectre de puissance et les fluctuations de fréquence du signal. Une méthode courante de mesure de fréquence consiste à déterminer la phase totale écoulée pendant un intervalle de temps T. Cette mesure, effectuée par exemple avec un compteur ou avec un discriminateur, fournit la fréquence moyenne pendant le temps ΔT, soit $f_{\Delta T}$.

$$f_{\Delta T} = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{1}{2\pi \Delta T} \int_{T}^{T + \Delta T} \frac{d\Phi}{dt}\, dt$$

Φ étant la phase totale ; on obtient la fréquence instantanée dans la mesure où $\frac{d\Phi}{dt}$ est constant pendant la durée de mesure.

Nous pouvons relier la fréquence instantanée f au spectre de puissance (3).

Soit un signal d'amplitude constante E_0 représenté par $X(t)$

$$X(t) = E_0 \exp j\Phi(t)$$

On posera : $\exp j\Phi(t) = H(t)$

On obtient : $H(t)\ H(t)^* = 1$

Par suite : $$-jH(t)^* \frac{dH(t)}{dt} = \frac{d\Phi}{dt}$$

Pour établir une connexion avec le spectre de puissance, on introduira la fonction $H_T(t)$ définie de la façon suivante :

$$H_T(t) = H(t) \qquad |t| < T/2$$
$$H_T(t) = 0 \qquad |t| > T/2$$

On a la fréquence instantanée f :

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{j}{2\pi} H^* \frac{dH}{dt}$$

avec : $H(t) = \lim_{T \to \infty} H_T(t)$

Soit $G_T(f)$ la transformée de Fourier de $H_T(t)$.

On peut écrire f :

$$f = \frac{-j}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_T(f) \exp(-j2\pi ft)df \int_{-\infty}^{+\infty} j2\pi f' \cdot G_T(f') \exp(j2\pi f't)df'$$

On fait la moyenne f de la fréquence sur un intervalle de temps T

$$\overline{f} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int \int_{-\infty}^{+\infty} G_T(f) \exp(-j2\pi ft)df \cdot G_T(f') \exp(j2\pi f't) \cdot f'df'dt$$

On obtient aisément :

$$\overline{f} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{|G_T|^2}{T} f\, df$$

Lorsque $T \to \infty$ $\quad \overline{f} = \int_{-\infty}^{+\infty} P(f)\, fdf$

La moyenne de la fréquence instantanée, prise sur une période suffisamment longue, donne le centre de gravité du spectre de puissance.

On calcule de la même façon la variance de la fréquence instantanée, c'est-à-dire $\overline{(f - \overline{f})^2}$. On obtient aisément :

$$\overline{(f - \overline{f})^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} P(f)\ (f - \overline{f})^2\, df$$

La variance de la fréquence instantanée est le second moment du spectre de puissance.

A l'aide de ces relations, il est possible de comparer les résultats obtenus par enregistrement des variations de fréquence avec les données de l'analyse spectrale. Le relevé d'un spectre de puissance fait appel le plus souvent à un filtre analyseur fixe, et le centre de gravité du spectre de puissance n'est pas directement relié à la fréquence instantanée du signal analysé. Par contre, il est très intéressant de calculer le second moment du spectre pour le comparer au carré moyen des fluctuations de fréquence du signal. Il faut cependant noter les points suivants :

Le spectre de puissance est relevé sur une durée limitée, et il ne donne pas la variance du spectre de la fréquence instantanée pris sur un domaine infini de fréquence. La bande de fréquence utile est limitée du côté des basses fréquences par l'inverse de la durée de balayage. On n'est limité du côté des hautes fréquences que par le domaine exploré par l'analyseur de spectre.

Le carré moyen de la fréquence du signal, calculé à partir de la fréquence moyenne délivrée par un compteur ou un discriminateur, peut être considéré comme la variance de la fréquence instantanée dans un domaine limité du côté des hautes fréquences par la constante de temps de l'appareil de mesure. La limite du côté des basses fréquences est apportée par la durée des mesures. La variance de la fréquence instantanée n'est pas estimée de façon identique par les deux méthodes : l'analyse spectrale met facilement en évidence les fréquences de modulation élevées, alors que la mesure directe de la fréquence ne permet d'atteindre aisément que les modulations lentes.

B. — Rappels sur le Maser

Nous utilisons un étalon de fréquence moléculaire comme élément essentiel d'un analyseur de spectre. Cet étalon est un Maser à deux niveaux d'énergie utilisant la raie 3-3 du spectre d'inversion de l'ammoniac. Les qualités que nous exigeons de cet oscillateur sont liées principalement à sa faible largeur de raie Δf, et à sa stabilité, plus précisément à l'invariance de sa fréquence pendant la durée des analyses spectrales. La puissance utilisable de l'oscillation du Maser est un facteur important car il conditionne la stabilité de la raie par le rapport signal/bruit.

Principe du Maser. — La fréquence de l'étalon moléculaire est contrôlée par une fréquence f_o associée à la transition de molécules d'un état d'énergie E_2 à l'état E_1. La répartition des molécules entre les deux états E_1 et E_2 de populations respectives n_1 et n_2 obéit à l'équilibre thermique à l'équation :

$$\frac{n_2}{n_1} = \exp - hf_o/KT$$

avec $hf_o = E_2 - E_1 \qquad E_2 > E_1$

h = constante de Planck

K = constante de Boltzmann

Aux fréquences micro-ondes, $\frac{hf_o}{KT} \backsimeq 2.10^{-3} \ll 1$

On obtient :

$$n_1 - n_2 = N \frac{hf_o}{2KT} \ll N$$

$N = n_1 + n_2$ est le nombre total de molécules.

Ce résultat montre que les molécules en équilibre thermo-dynamique ne peuvent qu'absorber de l'énergie. Par contre, si on peut inverser la population des niveaux et réaliser la condition $n_2 > n_1$, une émission stimulée cohérente est possible. On obtient un effet Maser (Microwawe Amplification by stimulated emission of radiation). Cette possibilité a été mentionnée par Weber dès 1952 (5). Townes et ses collaborateurs ont réussi la première émission stimulée de rayonnement en utilisant une raie d'inversion de l'ammoniac en 1954. Les Masers ont donné lieu depuis lors à de nombreuses recherches tant théoriques qu'expérimentales. De nombreuses publications ont paru à ce sujet. Nous ne ferons que rappeler la théorie du Maser en insistant sur les points les plus importants.

Le Maser à ammoniac est un Maser où l'inversion des populations s'effectue en triant les molécules. On élimine celles qui sont dans le niveau d'énergie inférieur E_1. Cette opération s'effectue dans un séparateur électrostatique. Les molécules d'ammoniac traversent, sous forme de jet produit par un gicleur, un ensemble de $2n$ barres d'axe parallèle au jet, et on établit un champ électrostatique inhomogène en portant les barres d'ordre pair à un potentiel V par rapport aux barres d'ordre impair, ce qui a pour effet de créer des composantes inhomogènes du champ électrique E. La tension appliquée V est la tension de focalisation.

L'énergie des deux états de la raie d'inversion J,K de NH_3 dans un champ E dépend de l'état considéré.

$$W = W_r(J,K) \pm \left(\frac{hf_o^2}{2} + \left(\frac{MK}{J(J+1)} \mu_o E \right)^2 \right)^{1/2}$$

L'énergie W augmente dans le champ pour l'état d'énergie supérieur, il diminue pour l'état inférieur. Une force radiale F_r s'exerce sur les molécules. Elle dépend du gradiant du champ et de l'état quantique des molécules.

$$F_r = - \frac{\delta W}{\delta E} \frac{\delta E}{\delta r}$$

Les molécules d'énergie E_2 seront focalisées si la vitesse radiale n'est pas trop grande ; c'est-à-dire si $\frac{1}{2} mr'^2 < W$.

Les molécules dans l'état d'énergie E_1 sont défocalisées et peuvent être éliminées. Le comportement de l'ensemble du focaliseur et du gicleur fournissant le jet est assez complexe et a fait l'objet de nombreux travaux (6, 7, 8, 9). Nous n'insisterons pas sur cette question.

Le flux de molécules dans l'état excité passe à travers une cavité résonnante accordée sur la fréquence de la transition. Le champ hyperfréquence dû au rayonnement du corps noir dans la cavité excite des transitions induites. Si un nombre suffisant de molécules est introduit dans la cavité, l'énergie libérée par les transitions peut compenser les pertes. Il y a oscillation entretenue. On obtient facilement les conditions d'oscillations en faisant quelques hypothèses simplificatives. On suppose que toutes les molécules sont dans le même champ hyperfréquence. On néglige l'interaction entre molécules, ce qui permet d'écrire l'hamiltonien perturbateur agissant sur les molécules à l'instant $t = t_o$

$$H' = E\mu \cos \omega t$$

E : Champ électrique

μ : Moment dipolaire des molécules

La fonction d'onde s'exprime par $\qquad \psi = a_1\psi_1 + a_2\psi_2$

a_1 et a_2 sont les probabilités des états ψ_1 et ψ_2.

Une molécule dans l'état ψ_2 d'énergie E_2 émet un photon de fréquence $f_o = E_2 - E_1/h$ en tombant dans l'état ψ_1 d'énergie E_1. La théorie des perturbations permet le calcul de $a_1(t)$ et $a_2(t)$ lorsque l'on donne les conditions initiales. En admettant que toutes les molécules entrant dans la cavité sont dans l'état ψ_2, ces conditions sont les suivantes :

$$a_2(t_o) = 1 \qquad a_1(t_o) = 0$$

On obtient alors :

$$a_2(t) = - \frac{\exp j2\pi(f - f_o)t}{2} \frac{x}{\theta} \sin \theta(t - t_o)$$

On a posé :

$$\theta = \left\{ 2\pi(f - f_o)^2 + x^2 \right\}^{1/2}$$

$$x = \mu E/\hbar \qquad \hbar = h/2\pi$$

μ est l'élément de matrice pour la composante du moment dipolaire dans la direction du champ électrique E. Soit P la puissance émise par un flux de n/molécules entrant par seconde dans la cavité.

$$P = nhf_o\,|a_1(\tau)|^2 \qquad \text{avec} \quad \tau = L/v$$

L est la longueur de la cavité, v la vitesse des molécules supposées monocinétiques.
On obtient ainsi :

$$P = nhf_o \frac{x^2}{\theta^2} \sin^2 \theta \frac{\tau}{2}$$

Cette équation fournit la condition d'oscillation lorsque les pertes dans la cavité sont compensées par la puissance émise par les molécules. La puissance dissipée dans la cavité, P', est reliée au facteur de qualité Q de la cavité par la relation qui définit Q :

$$P' = 2\pi f W/Q$$

W est l'énergie emmagasinée dans la cavité. On en déduit :

$$n = \left[\frac{\theta\tau/2}{\sin \theta\tau/2} \right]^2 \frac{\varepsilon_o A h v^2}{\pi \mu^2 L Q}$$

Le nombre minimum de molécules pour entretenir les oscillations est obtenu, lorsque $f = f_o$, pour E petit, c'est-à-dire

$$\frac{\theta\tau/2}{\sin \theta\tau/2} = 1 \qquad n_o = \frac{\varepsilon_o A h v^2}{\pi \mu^2 L Q}$$

On doit noter que n représente en fait la différence entre le nombre de molécules dans l'état E_2 et l'état E_1. Ce nombre dépend du rendement de l'ensemble gicleur focaliseur et bien entendu de la tension appliquée au sélecteur d'état.

Pour une distribution uniforme des vitesses, la largeur à mi-hauteur du spectre de fréquence de la puissance émise est, à champ faible, $0{,}89/\tau$.

Le rapport n/n_o est égal à $\left[\frac{\theta\tau/2}{\sin \theta\tau/2} \right]^2$. Lorsque n tend vers l'infini, $\frac{\theta\tau}{2}$ tend vers π. On a donc un phénomène de saturation.

Lorsque $\frac{\theta\tau}{2} = \pi$ $\qquad E = \frac{h}{\mu\tau}$ si $f = f_o$

On obtient ainsi la puissance emmagasinée dans la cavité à saturation.

$$W_c = \frac{\varepsilon_o h^2 A L}{2\mu^2\tau^2}$$

Fréquence d'oscillation. — La fréquence d'oscillation du Maser, f_m, ne correspond pas exactement à la fréquence de la transition moléculaire. On constate un entraînement qui est déterminé par la fréquence f_c de résonance de la cavité. La fréquence d'oscillation du Maser a été calculée (10) en introduisant la polarisation due au faisceau moléculaire, et en considérant cette polarisation comme une faible perturbation du champ existant dans la cavité en l'absence de faisceau moléculaire. On obtient finalement la relation suivante :

$$\frac{f_m - f_o}{f_o} = 2Q \frac{f_m - f_c}{f_c} \cdot \frac{v/L}{f_o} \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{\frac{\sin 2\theta}{2\theta} - 1}$$

Q est le facteur de qualité en charge de la cavité en l'absence de molécules.

Introduisons le facteur de qualité de la raie Q_r :

$$Q_r = \frac{f_o}{\Delta f_o} = \frac{f_o}{0{,}89\ v/L}$$

On obtient l'équation classique :

$$\frac{(f_m - f_o)}{f_o} = \frac{Q}{Q_r} \frac{1 - \cos 2\theta}{2{,}8\left(1 - \frac{\sin 2\theta}{2\theta}\right)} \frac{(f_c - f_o)}{f_o}$$

La variation de l'entraînement avec θ, c'est-à-dire avec le nombre de molécules, lorsqu'on le calcule avec cette formule, ne correspond pas exactement avec les données expérimentales. Ceci peut être attribué aux hypothèses simplificatives trajectoires parallèles, distribution uniforme des vitesses. Quelques auteurs (11, 12) ont repris les calculs en tenant compte de ces facteurs. Les formules obtenues ne diffèrent pas essentiellement du résultat précédent. Pour des conditions normales d'emploi du Maser, on peut employer une formule approchée :

$$\frac{f_m - f_o}{f_o} = \frac{Q}{Q_r} \frac{f_c - f_o}{f_o}$$

La fréquence d'oscillation du Maser n'est pas fonction uniquement de la fréquence propre de la cavité ou de celle de la raie d'inversion. Une analyse fine permet de mettre en lumière des entraînements en fréquence dus à des phénomènes variés : existence d'ondes progressives, influence des champs magnétiques, structure hyperfine de la raie d'inversion. On peut par divers dispositifs limiter l'influence de ces phénomènes qui déterminent malgré tout, de façon ultime, l'exactitude du Maser, c'est-à-dire la validité de son emploi comme étalon absolu de fréquence. L'utilisation du Maser pour l'analyse spectrale requiert des propriétés de stabilité, il importe peu que l'oscillation se fasse à la fréquence exacte de la transition. Cependant, les phénomènes d'entraînement font intervenir des paramètres expérimentaux : fréquence propre de la cavité, nombre de molécules dans le jet, tension de focalisation. La stabilité en fréquence du Maser dépend de l'invariance de ces paramètres au cours du temps. Le problème a été traité en détail par divers auteurs (13). Nous en présenterons les grandes lignes en insistant sur les résultats expérimentaux que nous avons obtenus avec nos Masers.

Influence des ondes progressives. — L'équation donnant la fréquence d'oscillation a été établie en utilisant une probabilité de transition moyenne à l'intérieur de la cavité, avec un champ hyperfréquence stationnaire. En fait, l'énergie n'est pas émise de façon uniforme le long de la cavité. La probabilité d'émission induite augmente avec le temps d'interaction, ce qui favorise l'émission vers l'aval de la cavité. La divergence du jet par contre, en produisant des collisions avec les parois de la cavité favorise l'émission au début de celle-ci. On obtient une onde progressive qui modifie la fréquence d'oscillation par effet Doppler. Son amplitude et son sens dépendent de la répartition des vitesses radiales et axiales. Les caractéristiques du gicleur, du focaliseur ainsi que l'alignement de ces éléments sur l'axe de la cavité déterminent l'amplitude des ondes progressives, modifiant ainsi la fréquence d'oscillation. On observe des variations de cette dernière pouvant atteindre quelque 10^{-9} entre différents Masers. Une composante d'onde progressive produite par les pertes par couplage peut être minimisée en couplant la cavité symétriquement au milieu de sa longueur.

Influence de la structure hyperfine. — La structure hyperfine de la raie centrale de $N^{14}H_3$ intervient pour limiter l'exactitude du Maser. Chaque niveau d'inversion est divisé en niveau hyperfin par le couplage avec le moment quadrupolaire du noyau N^{14}. Ces niveaux hyperfins sont caractérisés par leurs moments angulaires $F_1 = J + I$. Les satellites quadrupolaires correspondent aux transitions $\Delta F_1 = \pm 1$. La raie centrale de $N^{14}H_3$ comprend trois composantes $\Delta F_1 = 0$, dues à des variations de la constante de couplage quadrupolaire dans les niveaux d'énergie supérieur et inférieur. L'intensité de chacune des composantes à l'entrée de la cavité dépend des paramètres de fonctionnement du focaliseur. La raie $F_1 = 3$, dont la fréquence est la plus basse, est favorisée pour les faibles valeurs de la tension du sélecteur d'état. La fréquence d'oscillation augmentera avec la tension de focalisation et se stabilisera à saturation. Shimoda (14) a calculé la variation de la fréquence d'oscillation et trouve des résultats qui sont qualitativement en accord avec l'expérience.

Influence des champs électrique et magnétique. — Un champ électrique produit, par effet Stark, un déplacement de fréquence de l'ordre de $10^{-9}E$ (E volt/cm). Cet effet est négligeable. Un champ magnétique produit, par effet Zeeman, un élargissement de la raie centrale proportionnel au champ appliqué. Un effet Zeeman du deuxième ordre déplace la fréquence d'une valeur donnée par $\Delta f = 2.10^{-15}H^2$ (15). La complexité de la raie centrale de $N^{14}H_3$ entraîne un élargissement non symétrique de la raie et le déplacement du centre de gravité est une fonction complexe du champ appliqué. Nous avons mesuré l'influence sur la fréquence d'oscillation du Maser d'un champ magnétique perpendiculaire au jet lorsque la fréquence de la cavité est réglée sur la fréquence de la raie d'émission. Nous obtenons un maximum à champ nul, avec une décroissance de la fréquence d'allure quadratique devenant linéaire à champ élevé. En se plaçant au voisinage du champ nul, les fluctuations de fréquence seront du second ordre par rapport aux variations du champ magnétique.

L'influence des divers entraînements peut être réduite au prix d'une complexité accrue de l'appareillage. L'emploi de la raie 3–3 de $N^{15}H_3$ permet d'éviter les inconvénients dus à la structure hyperfine de $N^{14}H_3$. L'action des ondes progressives est diminuée dans de grandes proportions grâce au Maser à double jet (16, 17). Ces dispositifs sont indispensables pour la réalisation d'étalons de temps absolu, mais la stabilité relative de fréquence que nous recherchons peut être acquise avec la raie 3–3 de $N^{14}H_3$ par un choix et une stabilisation convenable des paramètres expérimentaux.

Nous avons relevé la fréquence d'oscillation du Maser en fonction de la tension de focalisation pour différentes valeurs de la fréquence de la cavité (fig. 1). L'allure générale des courbes s'explique en tenant compte de la variation de la fréquence de la raie due à la structure hyperfine et de la diminution de l'entraînement de la cavité à saturation, par l'action du facteur $F(\theta) = \dfrac{1 - \cos 2\theta}{1 - \sin 2\theta/2\theta}$. Ces courbes présentent une pente positive dans une large plage de variation de la tension V avec une tendance à saturation pour V élevé.

Nous avons précisé l'influence du nombre de molécules dans le jet en relevant la fréquence d'oscillation du Maser en fonction de la pression d'ammoniac p en amont du gicleur pour différentes valeurs de la tension de focalisation et de la fréquence de la cavité (fig. 2 et 3). Le paramètre p peut être relié au nombre de molécules dans le jet (18). Il existe une valeur p_o de la pression amont pour laquelle $\delta f(p, f_c)/\delta_p = 0$. Cette relation est valable pour une large plage de variation de la tension de focalisation au voisinage de la raie d'émission. En se plaçant en ce point, on obtient des fluctuations de fréquence qui sont du second ordre par rapport aux variations de la pression d'ammoniac. Il serait intéressant d'utiliser une relation semblable sur les courbes $f_m = F(V)$. Effectivement, lorsque la fréquence de la cavité est très supérieure à la fréquence de la raie d'émission, il existe une valeur V_o pour laquelle $\delta f(V, f_c)/\delta V = 0$ (fig. 1). Nous avons étudié avec précision l'influence de la pression d'ammoniac au voisinage d'une valeur V_o (fig. 4). On constate qu'il est possible de choisir des conditions expérimentales qui satisfont simultanément à la double condition :

$$\delta f(V, f_c)/\delta V = 0 \qquad \delta f(p, f_c)/\delta_p = 0$$

Malheureusement, ce résultat est obtenu pour des valeurs très faibles de la tension de focalisation ou pour des valeurs de la fréquence de la cavité très supérieures à celles de la raie. L'amplitude du Maser est loin d'atteindre la saturation. Il n'est pas très avantageux de travailler dans ces conditions. J'ai préféré utiliser le Maser à $N^{14}H_3$ avec une tension de focalisation élevée, $\delta f/\delta V$ tend à décroître, avec une valeur moyenne de 8.10^{-13} Hz/volt. Il n'est pas impossible de stabiliser un générateur de haute tension de façon à réduire les fluctuations relatives de tension à court terme à $\pm 10^{-4}$, ce qui correspond alors à $\pm 10^{-12}$ sur le Maser. La pression d'ammoniac est plus difficile à contrôler. En admettant des fluctuations de $\pm$ 1/100, on obtient au point p_o une variation relative de fréquence égale à $\pm 5.10^{-12}$.

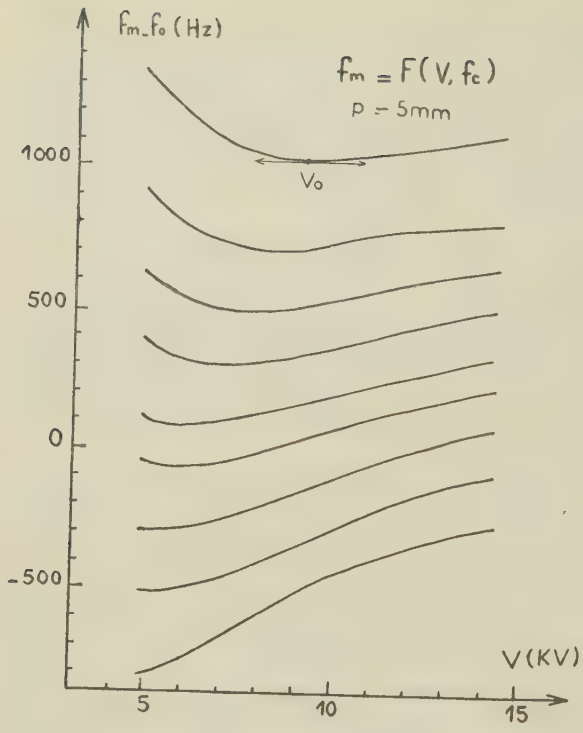


Fig. 1

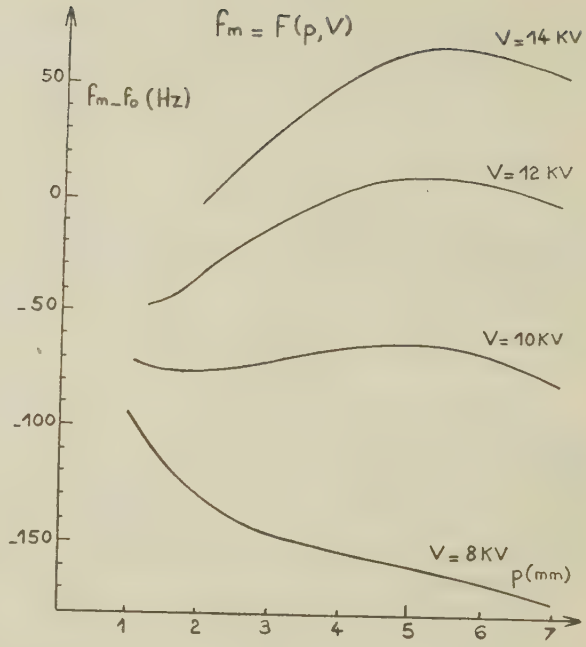


Fig. 2

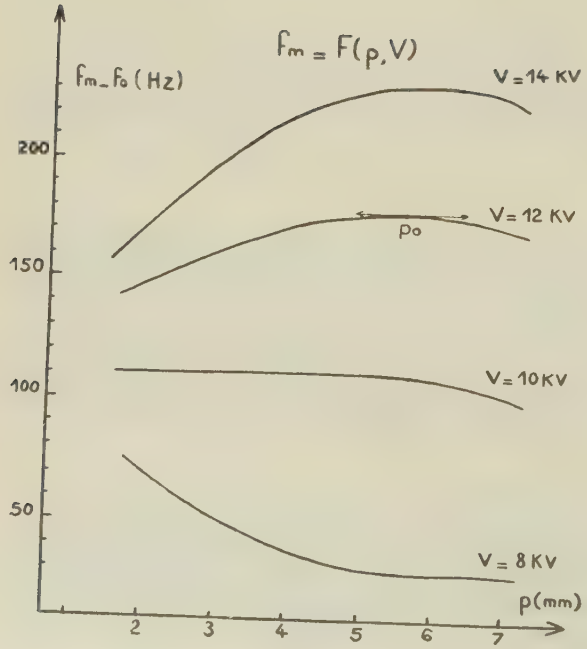


Fig. 3

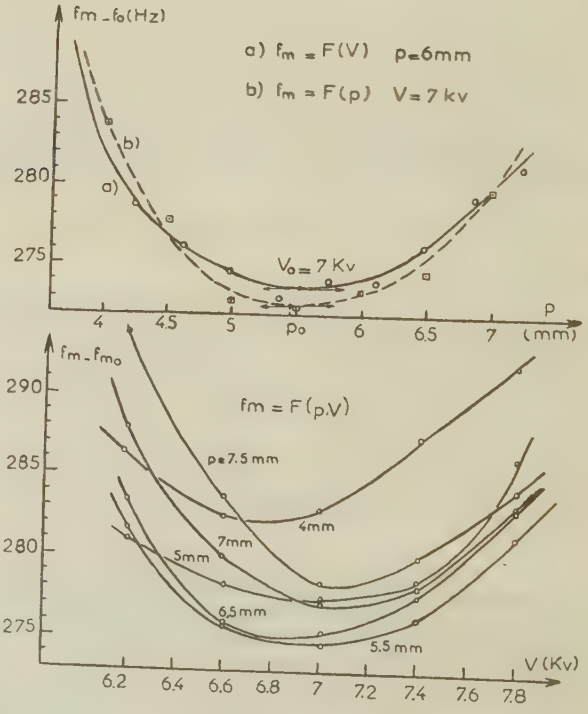


Fig. 4

On assure la stabilité du Maser vis-à-vis des champs magnétiques en annulant la composante du champ perpendiculaire au jet. Dans ce cas, $\delta f/\delta H = 0$. Par blindage ou par orientation convenable du Maser, on élimine la composante transversale du champ magnétique.

La stabilisation en température de la cavité est le moyen le plus efficace pour lutter contre l'entraînement en fréquence dû à celle-ci. Avec une cavité en cuivre, il est nécessaire de stabiliser la température à $\pm$ 1/100 °C pour obtenir une stabilité relative en fréquence de 10^{-10}. Nous utilisons des thermostats qui permettent d'obtenir quelques 10^{-11} pour des périodes atteignant parfois 1 heure. On a indiqué sur la figure 5 le résultat de la comparaison d'un des Masers du Laboratoire de l'Horloge Atomique avec une horloge à quartz. La fréquence est indiquée par un compteur sur une période de 10 secondes et les fluctuations moyennes ne dépassent pas 10^{-11}.

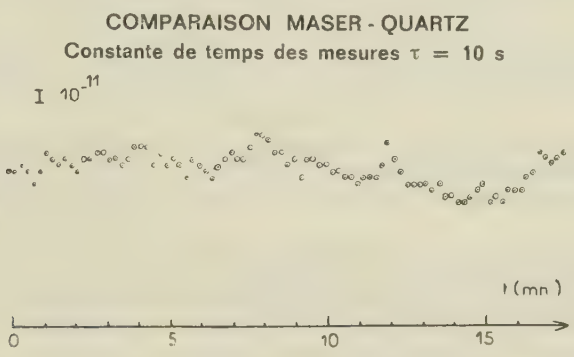


Fig. 5

Bruit dans l'oscillation du Maser. — Une des qualités essentielles du Maser est liée à son faible niveau de bruit. Le Maser ne fait pas appel à des particules chargées, il n'est pas sujet à l'effet de grenaille, source principale des fluctuations aléatoires des systèmes électroniques. Cependant, le bruit thermique dans la cavité, l'émission spontanée et les variations du nombre de molécules donnent naissance à des fluctuations de fréquence dont l'étude est essentielle pour notre application. Des considérations théoriques permettent de définir une limite ultime de la largeur du spectre du Maser. Nous effectuerons une comparaison avec les résultats d'une étude expérimentale qui met en œuvre deux Masers à $N^{14}H_3$.

Considérons tout d'abord le bruit dû aux fluctuations du nombre de molécules (10). Pendant un temps t^*, il y a $N = nt^*$ molécules qui subissent des transitions, n étant la densité du flux.

$$\Delta N = (nt^*)^{1/2}$$

On peut exprimer la puissance de sortie du Maser sous la forme suivante :

$$P_1 = nhf\, F(\theta, \alpha)$$

Le facteur α fait intervenir le couplage de la cavité au guide de sortie. Si on suppose que les fluctuations d'amplitude du champ électrique E dues au bruit sont faibles vis-à-vis de l'amplitude moyenne, on obtient les fluctuations de phase $\overline{\Delta\Phi^2}$:

$$\overline{\Delta\Phi^2}^{1/2} = \frac{\overline{\Delta E^2}^{1/2}}{E} = \frac{\overline{\Delta P_1^2}^{1/2}}{2P_1} = \frac{1}{2(nt^*)^{1/2}}$$

Les fluctuations d'amplitude ne sont corrélées que pendant un temps τ égal à l'inverse de la largeur de raie. Par contre, la mémoire de phase de l'oscillateur est infinie. Le carré moyen des fluctuations de phase, mesuré sur une durée t, devient par conséquent $\overline{\Delta\Phi_t^2}$.

$$\overline{\Delta\Phi_t^2}^{1/2} = \left[\frac{t}{\tau}\,\overline{\Delta\Phi^2}\right]^{1/2}$$

On en déduit les fluctuations de fréquence Δf_N^2 :

$$\overline{\Delta f_N^2}^{1/2} = \frac{\overline{\Delta\Phi_t^2}^{1/2}}{2\pi t} \cdot \frac{1}{4\pi\tau(nt)^{1/2}}$$

En introduisant le facteur de qualité Q_r de la raie ainsi que P_1, on peut exprimer les fluctuations relatives de fréquence sous la forme suivante :

$$\frac{\overline{\Delta f_N^2}^{1/2}}{f} = \frac{1}{4\pi Q_r}\left(\frac{hf\, F(\theta, \alpha)}{P_1 t}\right)^{1/2}$$

Dans les conditions normales d'emploi, le facteur $F(\theta, \alpha)$ est peu différent de l'unité.

Bruit thermique. — Le spectre de la raie d'oscillation dû au bruit thermique a été obtenu de façon approximative par Gordon, Zeiger et Townes (19) en considérant la naissance des oscillations dans la cavité à partir du bruit thermique. Les auteurs supposent que le spectre de fréquence du bruit thermique demeure inchangé quand les oscillations naissent. L'analyse à faible niveau du Maser comme amplificateur de bruit fournit la relation :

$$\Delta f_m = \frac{2\pi KT\Delta f^2}{P_1}$$

Δf_m est la largeur à mi-hauteur de la raie d'oscillation, Δf la largeur de la raie d'émission, P_1 la puissance à saturation prise égale à $nhf_o/2$. Δf_m est ici la largeur de raie calculée sur une période infinie, c'est-à-dire la largeur du spectre de Fourier.

Une analyse ultérieure faite par Shimoda, Wang et Townes (10) tient compte de la non-linéarité de l'amplificateur moléculaire et donne les fluctuations de fréquence Δf_t sur une durée finie t :

$$\frac{\overline{\Delta f_t^2}}{f_m}^{1/2} = \left(\frac{KT}{P_1 t}\right)^{1/2} \frac{0{,}16}{Q_r} \frac{\theta \sin^2 \theta}{2\theta - \sin 2\theta}$$

Les deux relations précédentes sont identiques à un facteur 1/2 près. Elles sont liées par la relation :

$$\Delta f_t = (\Delta f_m / 8\pi t)^{1/2}$$

Cette dernière formule est donnée par Grivet et Blaquière (20) qui montrent également que le facteur 1/2 provient de l'approximation linéaire dans la première formule.

Comparons les fluctuations de fréquence dues au bruit thermique à celles qui résultent de la variation du nombre de molécules :

$$\overline{\Delta f_t^2} \,/\, \overline{\Delta f_N^2} = KT/hf$$

Le bruit thermique est largement prépondérant dans les conditions ordinaires, T étant proche de 300 °K.

L'émission spontanée produit des photons qui ne sont pas en cohérence de phase avec le champ oscillant. C'est une source de bruit que l'on assimile à un bruit thermique en lui attribuant une température de bruit T_n. On obtient (21) : $T_n = hf/K$.

A la fréquence de la raie d'inversion de l'ammoniac, T_n correspond à 1,5 °K. Ici encore, avec les conditions habituelles de fonctionnement du Maser, les fluctuations de fréquence dues à l'émission spontanée sont négligeables vis-à-vis du bruit thermique.

Nous décrirons ultérieurement les expériences qui nous ont permis de déterminer les fluctuations de fréquence d'un Maser à ammoniac. Elles sont d'un ordre de grandeur supérieur aux fluctuations théoriques.

C. — Analyse spectrale

Généralités. — La complexité des problèmes posés par l'analyse spectrale dépend de la nature et de la fréquence du signal à analyser. Il convient de faire une distinction suivant que l'on analyse le spectre dans le domaine des basses ou radiofréquences ou dans celui des hyperfréquences. Dans ce dernier domaine, nous verrons qu'il n'est pas possible d'effectuer directement une analyse fine du signal. Il est donc nécessaire de transposer celui-ci dans le domaine basse fréquence. Nous distinguerons deux sortes de problèmes : les premiers concernent l'analyse proprement dite, effectuée en basse fréquence, et les seconds ont trait à la transposition de fréquence. Nous étudierons successivement ces deux aspects.

En fait, les signaux que nous analysons proviennent d'un quartz après une multiplication de fréquence. Nous étudierons la transposition du signal à l'aide du Maser comme si la multiplication de fréquence ne produisait aucun phénomène parasite. Dans une troisième partie, nous étudierons les modifications apportées au spectre de puissance du quartz par le processus de multiplication.

I. — Analyseur de spectre.

Un analyseur de spectre est un système capable de fournir sous une forme directement exploitable la densité spectrale de puissance d'un signal. Nous avons constaté l'intérêt de l'analyse harmonique dans la théorie des filtres linéaires. Réciproquement, l'utilisation de filtres linéaires et plus particulièrement du filtre passe-bande permet la décomposition de fonctions en composantes correspondant à des bandes de fréquences distinctes. Ce dernier constitue l'élément essentiel de tout analyseur harmonique. Le filtre passe-bande se définit par sa réponse impulsionnelle ou par son gain $G(f, f_o)$ tel que :

$$G(f, f_o) = 0 \qquad f < f_1 \qquad f > f_2$$
$$G(f, f_o) \neq 0 \qquad f_1 < f < f_2 \qquad \text{avec} \quad f_o = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

Supposons que nous recevions la sortie $Y(t)$ de ce filtre sur un détecteur qui pourra être soit linéaire, soit quadratique. Dans les deux cas, la sortie sera filtrée par une constante de temps T_n grande devant $1/f_o$, mais faible devant $1/\Delta f_o$, Δf_o étant la largeur de bande du filtre. On obtient dans le cas linéaire, à la sortie du détecteur, une tension $V(\alpha)$ égale à l'amplitude maximum du signal $Y(t)$. $V(\alpha)^2$ représente, à un facteur de proportionnalité près, la puissance moyenne de $Y(t)$ pendant la durée T_1 de la mesure.

Si T_1 tend vers l'infini, on obtient :

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} |Y(t)|^2 \, dt = K \, |V(\alpha)|^2 = |\overline{Y(t)}|^2$$

$$K|V(\alpha)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f, f_o)^2 \, P(f) \, df$$

Si $G(f, f_o)^2$ tend vers une fonction de Dirac $\delta(f, f_o)$, on obtient $KV(\alpha)^2 = P(f_o)df.V(\alpha)^2$ est donc une estimation de la densité spectrale de $X(t)$ à la fréquence f_o, dans la mesure où le filtre est très étroit et où la durée d'analyse devient infinie. Nous appellerons $[P_1(f_o)]^{1/2}$ la quantité $KV(\alpha)$. Les analyses du paragraphe I (A) permettent de calculer l'étalement de $P_1(f_o)$ par rapport au vrai spectre $P(f_o)$.

L'exploration complète du spectre de $X(t)$ nécessite le déplacement de la fréquence centrale f_o du filtre. Il est souvent plus aisé de translater le spectre de $X(t)$ par une méthode hétérodyne. C'est le système que nous avons employé. On mélange le signal à analyser de fréquence centrale f_1 avec un oscillateur local variable de fréquence f_2, de façon que la différence $f_1 - f_2$ se trouve au voisinage de f_o. Un balayage en fréquence convenable de l'oscillateur local permet de déplacer le spectre de $X(t)$ dans la bande passante du filtre. La méthode a l'inconvénient d'introduire le mélange de deux spectres par une opération non linéaire. Le système ne peut être acceptable que si l'oscillateur local peut être considéré comme une bonne approximation d'une fonction de Dirac, ou du moins comporte une seule raie dont la largeur est négligeable devant la largeur de bande du filtre. Une étude expérimentale du spectre obtenu avec un oscillateur auxiliaire monochromatique par rapport aux spectres qui font l'objet de notre étude permet de se rendre compte des perturbations apportées par l'oscillateur local. Nous montrerons qu'elles sont négligeables dans notre cas.

La détection qui suit le filtre peut être soit linéaire, soit quadratique. Nous avons préféré utiliser le premier mode de détection avec emploi d'une diode à cristal. La caractéristique de ces détecteurs reste linéaire pour une plage importante de variation d'amplitude de la tension d'entrée alors que la partie quadratique est limitée à une plage étroite correspondant aux faibles tensions d'entrée. On obtient $[P_1(f)]^{1/2}$.

La durée de balayage de la bande passante du filtre est un paramètre que l'on a intérêt à rendre constant. Le déplacement en fréquence de l'oscillateur local sera linéaire dans la limite des possibilités techniques. L'enregistrement du spectre peut par suite s'effectuer de façon simple en utilisant un enregistreur ordinaire avec un déplacement linéaire le long de l'axe des abscisses. Cependant, les défauts de linéarité du balayage de l'oscillateur local, les fluctuations d'origine thermique de la fréquence de celui-ci entraîneraient avec ce système une distorsion du spectre le long de l'axe des fréquences. On pallie à cet inconvénient en utilisant un enregistreur XY dont la voie X est commandée par la fréquence du signal analysé.

Nous nous intéressons uniquement au spectre de modulation de phase de l'harmonique du quartz. La modulation d'amplitude due au bruit sera éliminée dans l'analyseur de spectre par un écrêtage convenable des différents signaux. Le bruit propre de l'appareillage est négligeable. On élimine les bandes de fréquence indésirables provenant du mélange de l'oscillateur local avec le signal à analyser par un filtre passe-bande dont la largeur de bande est, de toute façon, bien supérieure à la bande de fréquence que l'on envisage d'explorer. Une étude préliminaire permet de délimiter le domaine où la densité spectrale de puissance du signal étudié a une amplitude non négligeable.

Le filtre passe-bande analyseur est caractérisé par sa fonction de transfert $G(f, f_o)$ ou d'une façon plus sommaire par sa bande passante, à 3 dB par exemple. Les caractéristiques de ce filtre dépendent du but poursuivi. Nous analysons des signaux presque monochromatiques comportant une raie centrale dont la largeur déduite de considérations théoriques (22) ou de mesures faites par d'autres auteurs et nous-mêmes (23) a une valeur absolue de l'ordre de quelques hertz, voire même moins. Nous cherchons à analyser la raie centrale de l'harmonique du quartz. La résolution de notre analyseur doit donc être de l'ordre du hertz. Le choix de la fréquence centrale du filtre dépendait de cet impératif et dans une moindre mesure de l'étalement du spectre. L'emploi d'un filtre à quartz à 10 KHz comprenant deux quartz nous a permis d'obtenir une réponse $G(f, f_o)$ symétrique avec une largeur de 0,9 Hz à 3 dB. Il est souvent pratique d'assimiler la fonction de transfert à une courbe de Gauss. L'approximation est très bonne sauf, peut-être, pour le pied de la courbe où l'atténuation gaussienne est supérieure. Cette approximation simplifie les calculs faisant intervenir $G(f, f_o)$ et sa transformée sans introduire d'erreurs essentielles. C'est précisément le cas pour le problème qui consiste à rechercher l'étalement du spectre par balayage à travers la bande passante du filtre. La durée limitée de balayage correspond à l'emploi d'un enregistrement de durée limitée T_1. C'est un problème que nous avons traité. Nous pouvons le reprendre en l'adaptant à ce cas particulier.

Soit :
$$G(f, f_o) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp -(f - f_o)^2/2\sigma^2$$

On l'exprime en fonction de la bande passante à 3 dB :

$$G(f, f_o) = A \exp\left[-2 \operatorname{Log} 2 \left(\frac{f - f_o}{f}\right)^2\right] \qquad A = [(2 \operatorname{Log} 2)/\pi]^{1/2}$$

La « fenêtre temporelle » $F(t)$ qui caractérise la durée limitée de l'analyse est obtenue ici comme enveloppe d'une onde à analyser, cette enveloppe reproduisant $G(f)$ dans le cas d'un balayage linéaire, avec une largeur de bande égale à Δf, v étant la vitesse de balayage.

$$F(t) = Av \exp\left[-2 \operatorname{Log} 2 \left\{\frac{(t - t_o)v}{\Delta f}\right\}^2\right]$$

On en déduit la transformée $J(f)$ de $B(t)$

$$J(f) = Av \int_{-\infty}^{+\infty} \exp -2 \operatorname{Log} 2 \left\{\frac{(t - t_o)\,v}{\Delta f}\right\}^2 \exp (j2\pi ft)dt$$

On obtient $|J(f)|^2$

$$|J(f)|^2 = B \exp \frac{-2\pi^2 f^2}{2 \operatorname{Log} 2\,(v/\Delta f)^2} \qquad \text{Avec } B = \frac{A^2 v^2 \pi}{2 \operatorname{Log} 2\,(v/\Delta f)^2}$$

On doit faire le produit de convolution :

$$Y(f) = J(f)^2 \ast G(f, f_o)^2$$

$$Y(f) = BA^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ \frac{-2\pi^2 f'^2}{2 \text{ Log } 2(v/\Delta f)^2} - \frac{4 \text{ Log } 2(f - f' - f_o)^2}{\Delta f^2} \right\} df'$$

$$Y(f) = C \exp \left\{ -4 \text{ Log } 2 \frac{(f - f_o)^2}{\Delta f} \left[1 - \frac{(2v \text{ Log } 2/\Delta f)^2}{\pi^2 + (2v \text{ Log } 2/\Delta f)^2} \right] \right\}$$

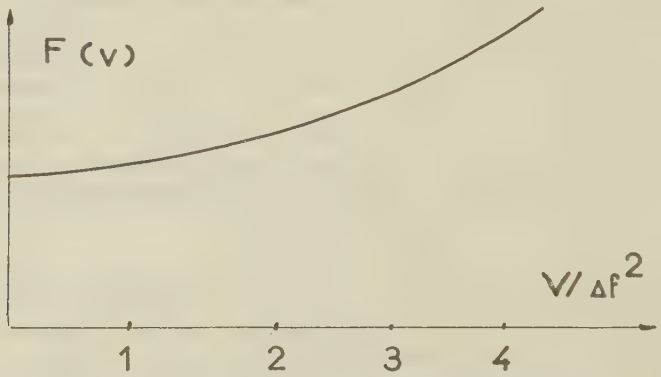
$Y(f)$ a une forme gaussienne. Sa largeur à mi-hauteur Δf_1 mesure l'étalement du spectre de puissance $P(f)$.

On obtient aisément :

$$\Delta f_1 = \Delta f \left[1 + \left(\frac{2 \text{ Log } 2}{\pi} \right)^2 \left(\frac{v}{\Delta f^2} \right)^2 \right] 1/2$$

Cette expression montre que l'étalement du spectre est négligeable dès que $v < \Delta f^2$. Avec le filtre utilisé, la vitesse de balayage doit être inférieure à 1 Hz/s.

La courbe $\frac{\Delta f_1}{\Delta f} = F(v)$ présentée ci-contre met en évidence la décroissance assez lente de la résolution pour $v > \Delta f^2$.



II. — Transfert en radiofréquence d'un signal hyperfréquence par un analyseur de spectre à Maser.

Nous savons que les nécessités de la métrologie dans le domaine des hyperfréquences, et plus particulièrement dans la gamme où se trouvent actuellement les étalons moléculaires, soit 10 000 MHz pour les étalons au Cesium, 24 000 MHz pour les étalons à ammoniac, conduisent à l'étude de la pureté spectrale des signaux qui peuvent être obtenus à ces fréquences. Les méthodes d'analyse spectrale utilisent dans ce domaine des moyens identiques à ceux que nous venons d'évoquer : décomposition du signal en bandes spectrales distinctes par l'utilisation d'un filtre passe-bande très étroit. Il est impossible d'obtenir ici un filtre suffisamment sélectif pour analyser des signaux presque monochromatiques. Nous devons effectuer une transposition du signal à analyser dans le domaine des hyperfréquences par l'utilisation d'un oscillateur auxiliaire monochromatique.

Nous avons étudié l'oscillation du Maser à $N^{14}H_3$ et montré sa pureté spectrale. Il sera donc possible de l'utiliser comme oscillateur auxiliaire monochromatique. Le Maser nous a permis d'analyser les signaux obtenus par multiplications successives de la fréquence d'oscillateurs à quartz. Cette analyse pose de nombreux problèmes. Le premier a trait à la puissance des signaux utilisés. Le Maser à $N^{14}H_3$ ne fournit, dans les meilleures conditions, qu'une puissance de l'ordre de 10^{-9} watt. En fait, pour éviter toute perturbation, on n'utilise qu'une fraction de la puissance et nous ne disposons que de quelque 10^{-11} watt. Nous devrons donc utiliser pour le transfert de fréquence un système hétérodyne. Le signal à analyser pourra-t-il jouer le rôle d'oscillateur local ? On pourrait lui faire jouer un tel rôle si sa puissance était de l'ordre du milliwatt, puissance nécessaire pour polariser convenablement un cristal et obtenir un battement utilisable. Il n'est pas impossible d'obtenir cette puissance à la sortie d'une chaîne de multiplication, mais les derniers étages doivent avoir un facteur de multiplication peu élevé. Ils se trouvent par conséquent dans la gamme des hyperfréquences où l'emploi de système de multiplication et amplification est délicat.

Nous avons évité ce passage en utilisant un facteur de multiplication élevé pour le dernier étage. La puissance obtenue pour l'harmonique est alors très faible. Avec un facteur de multiplication de 53, nous obtenons quelque 10^{-9} watt. Dans ce cas, une première méthode consiste à asservir en phase un générateur hyperfréquence sur l'harmonique du quartz. Le problème essentiel concerne la pureté spectrale du signal obtenu par asservissement. Elle doit être du même ordre que l'harmonique. Nous reviendrons sur cette question en présentant une analyse tant théorique qu'expérimentale.

Une deuxième méthode consiste à utiliser un oscillateur local auxiliaire que l'on mélange séparément avec le Maser et l'harmonique du quartz ; on l'élimine par un battement judicieux entre les deux signaux obtenus en radiofréquence. C'est le système auquel nous nous sommes arrêtés car il présente de nombreux avantages : commodités de mise en œuvre, simplicité, sûreté de fonctionnement.

Nous considérerons tout d'abord le système utilisant un Klystron dont la fréquence s'élimine par battement, puis, pour être complet, nous étudierons le système utilisant l'accrochage en phase du Klystron sur l'harmonique d'un quartz.

SCHEMA DE TRANSFERT EN RADIOFREQUENCE DU SIGNAL
DE L'HARMONIQUE D'UN QUARTZ

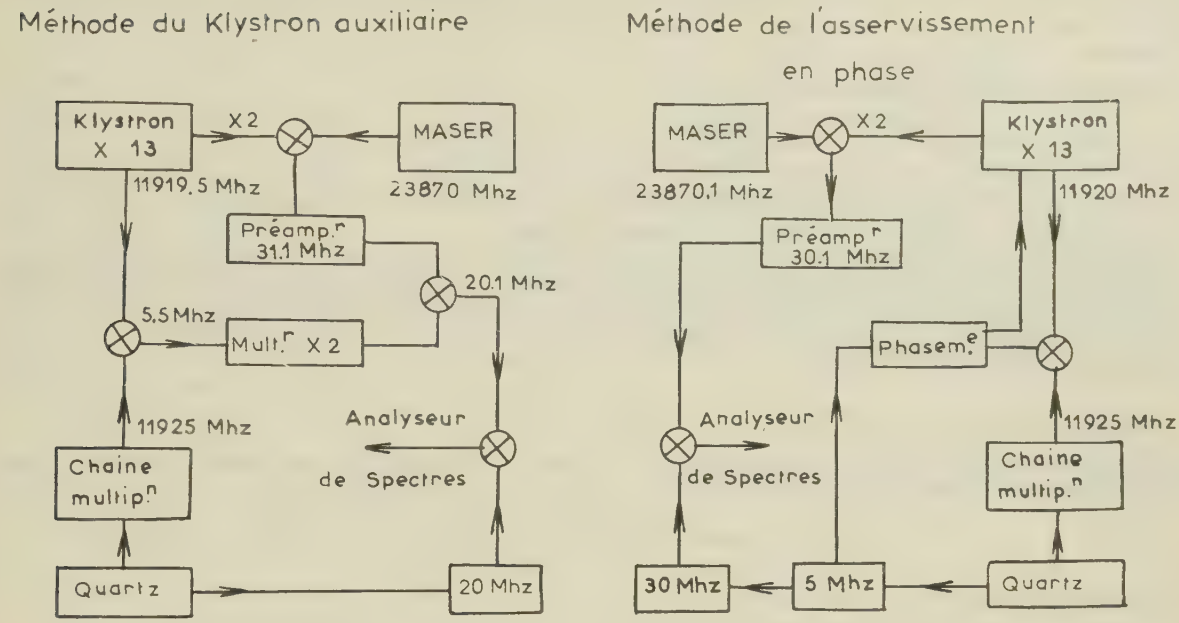


Fig. 6

a) **Méthode du Klystron auxiliaire.**

On utilise un Klystron fonctionnant dans la bande X, à 11 920 MHz. Il joue le rôle d'oscillateur local vis-à-vis du 53e harmonique du signal de sortie à 225 MHz d'une chaîne de multiplication. Il sert également à détecter l'oscillation du Maser après multiplication par deux. Nous représenterons l'oscillation de Klystron sous forme d'une onde modulée par un bruit que l'on développe en série de Fourier sur une période T.

$$V = V_o \sin \left\{ \omega_p t + \sum_n \delta_n \sin (\omega_n t + \varphi_n) \right\} = V_o \sin \left\{ \omega_p t + \Phi_n(t) \right\}$$

avec $\Phi_n(t) = \sum_n \delta_n \sin (\omega_n t + \varphi_n)$

Le signal du Maser aussi bien que celui de l'harmonique du quartz est monochromatique vis-à-vis de l'oscillation du Klystron. Nous supposerons que l'amplification moyenne fréquence permet d'éliminer parfaitement les composantes de fréquence indésirable. On peut écrire dans ces conditions le battement du Klystron avec l'harmonique du quartz :

$$V_a = v_a \sin \left\{ (\omega_p - n\omega_q)t + \Phi_n(t) \right\}$$

$\omega_p < n\omega_q$ $n\omega_q$ pulsation de l'harmonique du quartz.

Avec les mêmes hypothèses, on obtient le battement du Maser avec l'harmonique deux du Klystron :

$$V_m = v_m \sin \left\{ (\omega_m - 2\omega_p)t - \Phi'_n(t) \right\}$$

$\Phi'_n(t)$ représente la modulation de phase qui apparaît après multiplication du signal du Klystron. Lorsqu'on néglige l'intermodulation, on obtient au premier ordre :

$$\Phi'_n(t) = 2\Phi_n(t) = \sum_n 2\delta_n \sin (\omega_n t + \varphi_n)$$

Pour obtenir une composante de fréquence en $2\omega_p$, on multiplie par deux le signal V_a. Un dernier mélange entre cet harmonique de V_a, soit V_b, et V_m fournit le signal $Y(t)$ recherché.

$$V_b = v_b \sin \left\{ 2(\omega_p - n\omega_q)t + \Phi'_n(t) \right\}$$

$$Y(t) = Y_o \sin \left\{ (\omega_m - 2n\omega_q)t + \varphi_o \right\}$$

On a éliminé ainsi la fréquence centrale du Klystron et son bruit.

Cependant, on doit noter que les hypothèses faites ci-dessus sont assez restrictives : on suppose un filtrage parfait et on ne se préoccupe pas de l'influence de la modulation d'amplitude du Klystron sur les différents systèmes mélangeurs. Nous montrerons à l'occasion de l'étude des fluctuations de phase des chaînes de multiplication, qu'il existe une corrélation entre les fluctuations de fréquence du Klystron et les variations d'une grandeur $Y(t)$ obtenue par une méthode semblable à celle

que nous venons d'exposer. Ces variations sont négligeables lorsque la fréquence du Klystron est stabilisée : nous utilisons V_a, signal de battement de l'harmonique du quartz avec le Klystron pour effectuer cette stabilisation. V_a, après amplification, est écrêté, envoyé sur un discriminateur de fréquence. Il fournit une tension continue de correction qui permet de stabiliser l'oscillation du Klystron. Le carré moyen des fluctuations de fréquence du Klystron asservi ne dépasse pas (50 hertz)^2. Par ailleurs, le bruit de modulation d'amplitude du Klystron est réduit dans une large mesure par l'emploi de mélangeurs symétriques.

b) **Méthode de l'accrochage en phase du Klystron.**

Nous asservirons un Klystron X13 sur le 53e harmonique d'un quartz en vue d'obtenir un générateur de puissance ayant le même spectre de bruit que l'harmonique du quartz. Le problème a été proposé et étudié initialement par Strandberg (24). Le principe est simple : la phase du signal à asservir est comparée dans un phasemètre à celle du signal de référence. La tension d'erreur qui en résulte est appliquée au générateur à stabiliser de manière à maintenir une différence de phase constante entre les deux signaux. En général, leurs fréquences sont identiques, il est alors nécessaire d'utiliser un amplificateur continu pour le signal d'erreur sortant du détecteur de phase.

Nous avons utilisé un montage dans lequel la fréquence du Klystron n'est pas égale à la fréquence du signal de référence, nf_r, mais $nf_r \pm f_r$. La méthode présente l'avantage d'une plus grande souplesse dans le choix de la fréquence finale et élimine l'amplificateur continu de réalisation délicate au profit d'un amplificateur en radiofréquence.

Nous recherchons le spectre de puissance du Klystron asservi. Soit $V(t)$ la tension de sortie du Klystron que nous supposerons modulé en fréquence :

$$V(t) = V_o \sin \left\{ \omega_p t + \int \omega(t)\, dt \right\}$$

ω_p est la pulsation de la raie centrale du Klystron. $\omega(t)$ représente la modulation due au bruit. Nous développons $\omega(t)$ en série de Fourier sur une période T.

$$\omega(t) = \sum_n \frac{C_n}{T} \cos(\omega_n t - \varphi_n)$$

En négligeant l'intermodulation, on peut écrire :

$$V(t) = V_o \left\{ \sin \omega_p t + \sum_n \frac{C_n}{\omega_n T} \sin(\omega_n t - \varphi_n) \cos \omega_p t \right\}$$

On calcule la puissance moyenne P_T de $V(t)$ sur une durée T :

$$P_T = \frac{V_o^2}{2} \left[1 + \sum_n \frac{C_n^2}{2T^2\omega_n^2} \right]$$

Le premier terme représente la puissance de la raie centrale. En ne considérant que les termes de bruit, on obtient aisément le spectre de puissance de $V(t)$, soit $P(f)$:

$$P(f)df = \frac{V_o^2}{2} \left\{ \frac{W(f)df}{4\pi^2 f^2} \right\}$$

$W(f)df$ représente la densité spectrale de puissance du bruit de modulation de fréquence.

$$W(f)df = \lim_{T \to \infty} \left(\frac{C_n^2}{2T^2} \right)$$

On peut calculer à partir de ces données les effets de la boucle stabilisante. Le nième terme de $\omega(t)$ donne une modulation de phase $\psi(\omega_n)$. Cette modulation de la sortie du Klystron a pour résultat une tension $G_p\psi(\omega_n)$ à la sortie du phasemètre, G_p étant le gain du phasemètre en volt/radian. $G_p\psi(\omega_n)$ est converti en modulation de fréquence dans le Klystron avec un gain K_f, ce qui peut être considéré comme une modulation de phase de gain K_p :

$$K_p = \frac{K_f}{j\omega_n}$$

On en déduit le gain total :

$$G(\omega_n) = \frac{G_p K_f}{j\omega_n} = \frac{A}{j\omega_n}$$

En fermant la boucle de réaction, le nième terme est réduit par le facteur $[1 - G(\omega_n)]^{-1}$. On obtient ainsi un terme C'_n

$$C'_n = \frac{C_n}{1 - A/j\omega_n} \qquad C'^2_n = \frac{C_n^2\omega_n^2}{A^2 + \omega_n^2}$$

On en déduit la densité spectrale P_s du Klystron asservi :

$$P_s(f)df = \frac{V_o^2}{2} \quad \frac{W(f)df}{A^2 + 4\pi^2 f^2}$$

En intégrant sur les fréquences, on obtient la puissance totale de bruit P_b du Klystron stabilisé.

$$P_b = P_o \int_{f_o}^{f_c} \frac{W(f)df}{A^2 + 4\pi^2 f^2}$$

P_o représente la puissance de la raie centrale f_o et f_c sont les limites de la bande passante d'asservissement, c'est-à-dire celles pour lequel le gain s'annule. Soit $\overline{\Delta\varphi^2}$ le carré moyen des fluctuations de phase du Klystron stabilisé.

$$\overline{\Delta\varphi^2} = \frac{P_b}{P^o} = \int_{f_o}^{f_c} \frac{W(f)df}{A^2 + 4\pi^2 f^2}$$

Comme nous n'avons pas utilisé systématiquement ce système, nous donnons ici quelques indications sur la réalisation pratique et le fonctionnement.

Le Klystron à asservir est branché dans une des branches non couplées d'un T magique fonctionnant en mélangeur symétrique. Le signal de référence est appliqué dans la branche conjuguée. Les deux branches symétriques comportent les détecteurs équilibrés. Un amplificateur à entrées symétriques permet d'ajouter les signaux en opposition de phase provenant des cristaux. La fréquence intermédiaire à 5 MHz permet la réalisation d'une bande passante très large avec un déphasage minimum. La sortie à faible impédance est reliée au détecteur de phase. Un système déphaseur cathodyne fournit les deux tensions égales et en opposition de phase sur le côté référence. L'emploi de systèmes apériodiques dans cet ensemble lui donne une large bande passante.

Des précautions particulières sont prises pour éviter la présence, sur la tension de correction, d'un résidu de tension à 5 MHz qui peut provoquer, par modulation du Klystron puis détection dans le système mélangeur, un auto-accrochage, le servo-mécanisme se fermant sur lui-même pour la fréquence 5 MHz. Ce phénomène est évité en soignant le blindage et la symétrie des différents éléments du phasemètre. Le contrôle de l'accrochage se fait en observant la figure de Lissajoux formée par le signal de référence à 5 MHz et celui qui sort de l'amplificateur à 5 MHz.

Les valeurs des paramètres qui règlent le gain du servo-mécanisme sont les suivantes :

$$G_p = 0{,}1 \text{ V/rad} \qquad K_f = 0{,}8 \text{ MHz/V}$$
$$K_p = 6.10^5 \text{ rad/V} \qquad A = 6.10^5 \text{ S}^{-1}$$

On peut supposer $W(f)$ indépendant de f dans la bande passante. Dans ces conditions :

$$P_b = P_o \int_{f_o}^{f_c} \frac{W(f)df}{A^2 + 4\pi^2 f^2} = P_o W(f) \int_{f_o}^{f_c} \frac{df}{A^2 + 4\pi^2 f^2} = P_o W(f) \text{ Arc tg } \frac{f_o}{A}$$

On peut estimer $W(f)$ voisin de 100 rad/s.

$$P_b = \frac{100\ P_o}{A}$$

$$\overline{\Delta\varphi^2} = \frac{P_b}{P_o} = \frac{100}{A} \simeq 1{,}6.10^{-4}$$

La puissance de bruit totale du Klystron stabilisé est bien en dessous de la puissance du porteur. La valeur moyenne du déphasage est faible, et la pureté spectrale du Klystron est du même ordre que celle du signal de référence.

On voit donc que la méthode du Klystron asservi fournit les mêmes résultats que celle du Klystron auxiliaire ; ce sont des questions de commodité de fonctionnement qui nous ont conduits à préférer ce dernier système.

III. — Multiplication de fréquence et spectre de puissance.

Quels que soient les moyens employés pour analyser la pureté spectrale d'un signal en hyperfréquence, on obtient un spectre correspondant à des fluctuations de phase dont il est, a priori, impossible de distinguer l'origine. L'étude du spectre de l'harmonique d'un quartz n'échappe pas à cette difficulté. Un des points essentiels de notre travail consiste à déterminer la part des diverses sources de bruit dans le spectre final. Nous pouvons distinguer les problèmes concernant l'oscillateur à quartz et ceux ayant trait à la multiplication de fréquence.

Un oscillateur n'est jamais parfaitement monochromatique. Le bruit Johnson des éléments résistants des circuits de l'oscillateur, le bruit Schottky des courants électroniques entraînent des fluctuations aléatoires d'amplitude et de phase de l'oscillation. Le spectre comporte une raie centrale plus ou moins fine et des composantes de bruit réparties dans une gamme étroite de fréquence autour de la raie centrale. L'aspect théorique du problème a suscité une étude remarquable de Blaquière (25) qui a calculé le spectre d'un oscillateur à partir des caractéristiques de celui-ci. Nous reviendrons sur cette question dans la deuxième partie de notre exposé.

A) Action sur les raies de modulation.

Le signal de l'oscillateur caractérisé par une certaine répartition spectrale est envoyé à l'entrée d'un ensemble de multiplication de fréquence. La fréquence centrale du quartz est multipliée par p, mais le spectre de puissance n'est pas simplement transposé dans le domaine des fréquences : il subit de profondes modifications, évidentes si l'on considère que la multiplication de fréquence fait nécessairement appel à des dispositifs non linéaires. Considérons un étage multiplicateur idéal, auquel on applique une onde modulée en phase :

$$V = V_o \sin \Phi(t) \qquad \Phi(t) = \omega_o t + \sum_m \delta_{mo} \sin \omega_m t$$

Si les circuits de sortie sont suffisamment sélectifs pour éliminer tous les harmoniques autres que l'harmonique de rang p du signal d'entrée, on obtient :

$$V_s = V_1 \sin p\Phi(t)$$

$$V_s = V_1 \sin \left\{ p\omega_o t + \sum_m p\delta_{mo} \sin \omega_m t \right\}$$

On obtient finalement le spectre de V_s ; en prenant la notation complexe :

$$V_s = V_1 \exp(j\omega_p t) \exp \left\{ j\left(\sum_m \delta_m \sin \omega_m t\right) \right\}$$

$$V_s = V_1 \exp(j\omega_p t) \prod_{m=1}^{\infty} \exp(j\delta_m \sin \omega_m t)$$

On a posé :

$$\omega_p = p\omega_o \qquad p\delta_{mo} = \delta_m$$

$$\exp(j\delta_m \sin \omega_m t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' J_n(\delta_m) \exp(jn\omega_m t)$$

J_n est la fonction de Bessel d'ordre n.

$$V_s = V_1 \exp(j\omega_p t) \prod_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\delta_m) \exp(jn\omega_m t) \right]$$

Cette formule met en évidence des raies de pulsation $\omega = \omega_p + \sum_m n_m\omega_m$ ayant l'amplitude $V_1 \prod_m J_{n(m)}(\delta_m)$. Le spectre est en général symétrique par rapport à la fréquence centrale ω_p, car :

$$\prod_m J_n(\delta_m) = \prod_m J_{-n}(\delta_m)$$

Il n'en est pas de même lorsque les valeurs de ω_m sont multiples entières d'un fondamental ω_1, ce qui est le cas lorsque $\sum_m \delta_m \sin \omega_m t$ représente le développement en série de Fourier d'un oscillogramme de bruit modulant une porteuse. Il existe alors plusieurs combinaisons possibles $\sum_m n_m\omega_m$ correspondant à la même fréquence. L'amplitude des raies symétriques sera différente lorsque les sommes des indices des produits partiels ne sont pas de même parité.

Le spectre est très simplifié lorsque $\delta_m \ll 1$ quel que soit m. On développe $J_n(\delta_m)$ en ne gardant que les termes des deux premiers ordres :

$$J_n(\delta_m) = \frac{(\delta_m)^n}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r\,!\,(r+n)\,!} \frac{{\delta_m}^{2r}}{2}$$

$J_n(\delta_m) \backsimeq 0$ pour $n > 2$. Par suite :

$$J_n(\delta_m) \backsimeq \frac{(\delta_m)^n}{2} \left[\frac{1}{n!} - \frac{{\delta_m}^2}{4(n+1)\,!} \right]$$

$$V_s = V_1 \exp(j\omega_p t) \prod_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[1 - \frac{m^2}{4} \right] + \frac{\delta m}{2} \exp(j\omega_m t) + \frac{\delta m^2}{8} \exp(j2\omega_m t) - \right.$$

$$\left. - \frac{\delta m}{2} \exp(-j\omega_m t) + \left(\frac{\delta m^2}{8} \right) \exp(-j2\omega_m t) \right\}$$

$$V_s = V_1 \left[1 - \sum_m \frac{\delta m^2}{4} \exp(j\omega_p t) + \sum_m \pm \frac{\delta m^2}{2} \exp(j\omega_p \pm \omega_m)t + \right.$$

$$\left. + \sum_m \frac{\delta m^2}{8} \exp(j\omega_p \pm 2\omega_m)t \pm \sum_{m \neq m'} \frac{\delta m \delta m'}{4} \exp(j\omega_p + \omega_m + \omega_{m'})t \right]$$

Au premier ordre en δ_m, le spectre ne comprend que la raie centrale et les raies de modulation d'amplitude $\frac{\delta m}{2}$. Au second ordre, on trouve un spectre d'intermodulation.

L'action de la multiplication de fréquence sur le spectre d'un signal revêt deux aspects différents suivant la valeur de δ_m. Le spectre conserve son apparence initiale lorsque l'amplitude δm_o des raies de modulation et la valeur du facteur

de multiplication p sont telles que $p\delta_{m_o}$ demeure inférieur à l'unité. Le domaine des fréquences où les raies de modulations ne sont pas négligeables reste inchangé, l'amplitude des raies est simplement multipliée par p. Dans le cas contraire, l'aspect et l'étendue du spectre sont considérablement modifiés.

B) **Action de la multiplication sur la largeur de raie.**

La multiplication de fréquence entraîne également un élargissement de la raie du signal. On considère une onde imparfaitement monochromatique comme formée de tronçons de sinusoïdes, de mêmes amplitudes et même période, légèrement déphasés de façon aléatoire les uns par rapport aux autres (26). Deux trains d'ondes séparés par le temps τ prennent la forme suivante :

$$y_1(t) = A_o \sin \omega t \qquad y_2(t) = A_o \sin [\omega(t + \tau) + \Delta\Phi]$$

$\Delta\Phi$ est un déphasage aléatoire dont le carré moyen peut s'exprimer à partir des caractéristiques de l'oscillateur. En prenant la moyenne temporelle de l'expression $y_1(t)\, y_2(t + \tau)$ sur la durée du train d'onde, on obtient aisément la fonction de corrélation :

$$\overline{y_1(t)\, y_2(t + \tau)} = \frac{1}{2} A_o^2 \cos \omega_o\tau \cos \Delta\Phi = \frac{1}{2} A_o^2 \sin \omega_o\tau \sin \Delta\Phi$$

$$\Psi(\tau) = \langle \overline{y_1(t)\, y_2(t + \tau)} \rangle = \frac{1}{2} A_o^2 \exp \left(- \frac{1}{2} \langle (\Delta\Phi^2) \rangle\right) \cos \omega_o\tau$$

$\Delta\Phi$ est une variable aléatoire ergodique $\langle \Delta\Phi^2 \rangle = \overline{\Delta\Phi^2}$

$$\Psi(\tau) = \frac{1}{2} A_o^2 \exp \left(- \frac{1}{2} \overline{\Delta\Phi^2} \cos \omega_o\tau\right)$$

Si on multiplie par p ce signal, on obtient à la sortie du multiplicateur les mêmes tronçons de sinusoïdes, mais le déphasage $\Delta\Phi'$ entre deux tronçons correspondant aux trains d'onde d'entrée $y_1(t)$ et $y_2(t + \tau)$ est égal à $p\Delta\Phi$. On en déduit la fonction de corrélation de l'onde de sortie.

$$\Psi'(\tau) = \frac{A'^2_o}{2} \exp \left(- \frac{1}{2} p^2 \overline{\Delta\Phi^2} \cos p\omega_o\tau\right)$$

On calcule le spectre de puissance correspondant à $\Psi(\tau)$ ou $\Psi'(\tau)$ en appliquant la relation de Wiener-Kintchine :

$$P(f) = 2A_o^2 \int_0^\infty \exp (- \alpha\tau \cos \omega_o\tau d\tau) \qquad \text{On a posé } \overline{\Delta\Phi^2} = \alpha\tau$$

$$P(f) = A_o^2 \frac{\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2(f - f_o)^2}$$

On en déduit la largeur de raie : $\Delta f = \alpha/\pi$.

De la même façon, on obtient la largeur de raie après multiplication Δf_p :

$$\Delta f_p = p^2\alpha/\pi$$

On en déduit :

$$\frac{\Delta f_p}{f_p} = p \frac{\Delta f}{f}$$

La largeur relative de la raie est multipliée par le facteur de multiplication.

Nous conclurons en soulignant l'incidence de ces phénomènes sur l'analyse spectrale en hyperfréquence. L'utilisation d'une chaîne ayant un facteur de multiplication élevé permet de mettre en évidence, avec un analyseur de spectre de haute résolution, des raies de modulation extrêmement faibles, et il est parfois possible d'atteindre la raie centrale d'oscillation d'un quartz.

Nous n'avons considéré jusqu'à présent que les phénomènes inhérents au processus même de multiplication. Le bruit propre des chaînes de multiplication introduit des fluctuations de phase qui feront l'objet d'une étude spéciale.

CHAPITRE II. — RÉALISATION DE L'ANALYSEUR DE SPECTRE A MASER

A. — Les chaînes de multiplication.

1° **Principe de la multiplication de fréquence.** — Le principe de la multiplication de fréquence repose sur les propriétés des systèmes non linéaires. La réponse $Y(t)$ d'un tel système à une entrée sinusoïdale $X(t) = X_o \exp(j\omega t + \varphi)$ peut être développée en série de Fourier :

$$Y(t) = \sum_n Y_n \exp(j\omega_n t + \varphi_n)$$

On met en évidence l'harmonique de rang n qui peut être isolé en utilisant un filtre passe-bande centré sur $n\omega$, la bande passante étant bien inférieure à ω. La réalisation d'une chaîne de multiplication fait apparaître divers problèmes : choix du système non linéaire, étude d'un filtre passe-bande satisfaisant aux conditions de filtrage, et surtout choix des conditions assurant une stabilité optimum et une protection efficace contre le bruit. Nous aborderons successivement ces différents points.

Le choix du système non linéaire est souvent dicté par le domaine de fréquence où s'effectue la multiplication. Dans notre réalisation, nous utilisons des oscillateurs à quartz oscillant à 100 KHz, 1 MHz ou 5 MHz et nous aboutissons à la fréquence du Maser, dans la gamme des micro-ondes. Dans ce dernier domaine, la multiplication de fréquence fait appel à des cristaux. Par contre, dans la bande des radiofréquences, l'amplification ne pose pas de problème, il est avantageux de la combiner avec le processus de multiplication. Le fonctionnement non linéaire est obtenu en faisant travailler l'amplificateur en classe C. Tous nos multiplicateurs jusqu'à 225 MHz utilisent ce système dont le fonctionnement est très simple. La tension d'entrée du tube multiplicateur est suffisamment grande pour que celui-ci soit bloqué pendant une fraction du cycle de fonctionnement. On obtient sur la plaque une impulsion de courant correspondant au moment où le tube conduit. Cette impulsion, décomposée en série de Fourier, permet le calcul de l'amplitude de la composante du courant à la fréquence $n\omega$ apparaissant dans le circuit de la plaque. La durée de l'impulsion peut être décrite par l'angle θ de passage du courant. Le réglage de θ, obtenu en faisant varier la tension d'entrée et la polarisation appliquée sur la grille, modifie la forme de l'impulsion et la répartition des harmoniques. Il existe pour chaque harmonique une valeur optimum, peu critique d'ailleurs, de l'angle de passage. La détermination précise du fonctionnement d'un étage multiplicateur fait appel à une méthode graphique, basée sur l'utilisation des caractéristiques de la lampe amplificatrice [27]. On construit point par point l'impulsion du courant plaque en fonction de la tension d'attaque et de la polarisation, on en déduit l'intensité moyenne du courant à la fréquence $n\omega$, puis la valeur de l'impédance du circuit de plaque de la lampe. La même méthode fournit la valeur moyenne du courant de grille créé par la pointe positive de la tension d'entrée du tube. Ce courant assure une polarisation automatique à l'aide d'une résistance de fuite de grille. Le rendement d'un étage multiplicateur est généralement suffisant pour permettre l'attaque directe de l'étage suivant à travers le filtre. Celui-ci fait appel à des circuits accordés classiques. Lorsque les tubes multiplicateurs sont des pentodes, un simple circuit accordé à Q élevé assure un filtrage efficace. Nous avons également utilisé des doubles triodes dans un montage symétrique, en push-pull ou push-push qui élimine, lorsque la symétrie est parfaite, les harmoniques pairs ou impairs. Les conditions de filtrage deviennent moins sévères et on peut admettre l'amortissement apporté par la faible résistance interne de la triode. On améliore ce montage en utilisant un filtre à deux circuits couplés au voisinage de l'accord critique. Cette solution accroît la réjection des harmoniques indésirables, et le couplage des deux circuits introduit un paramètre supplémentaire pour le réglage optimum de la courbe de réponse en amplitude et en phase du filtre.

L'aspect de la courbe de réponse en phase au voisinage de la résonance est primordial pour la stabilité de l'étage multiplicateur. Il faut rechercher une solution qui présente une variation minimum de la phase dans le domaine où la fréquence centrale du filtre est susceptible de fluctuer. Malheureusement, on ne peut pas satisfaire séparément à des conditions de phase et d'amplitude données, et seul un filtre complexe reproduisant un filtre passe-bande idéal permet de rejeter en dehors de la bande centrale le domaine des variations rapides de phase. La variation au voisinage de l'accord est proportionnelle au Q du circuit accordé. Avec deux circuits couplés, le coefficient de couplage K intervient dans la détermination de la pente au centre du filtre suivant la loi :

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{2\left(\frac{Q_p}{Q_s}\right)^{1/2} + \left(\frac{Q_s}{Q_p}\right)^{1/2}}{K_c\omega_o\left[\left(\frac{K}{K_c}\right)^2 + 1\right]}$$

K_c : couplage critique.

Q_p et Q_s : coefficient de surtension des circuits primaires et secondaires.

On peut adopter une valeur du couplage supérieur au couplage critique pour diminuer $d\varphi/d\omega(\omega_o)$. On ne peut cependant améliorer sensiblement le comportement du filtre vis-à-vis des variations de phase sans altérer rapidement la courbe de réponse en amplitude. Une valeur de K/K_c voisine de 2 semble un compromis judicieux. La pente de la réponse en phase, $d\varphi/d\omega$, présente alors deux maximums correspondant aux sommets de la courbe d'amplitude, un réglage précis doit faire coïncider la fréquence centrale du filtre avec la fréquence de l'harmonique, le gain de stabilité en phase n'est réalisé qu'à ce prix.

Les éléments d'accord des circuits sont choisis de façon à réduire au maximum les fluctuations d'ordre thermique. Le rapport $d\varphi/dT$, T étant la température, fait intervenir un facteur qui est généralement voisin de 5.10^{-5}. L'application de la formule précédente, pour $Q_p = Q_s \simeq 80$, conduit, dans la relation $d\varphi = \alpha dT$, à une valeur de l'ordre de 2 à 3.10^{-3} rad/°C.

Il s'agit là d'une cause importante de fluctuations. Une variation de température de 1 °C entraîne, pour un filtre centré sur 5 MHz et une période de 1 s, une erreur relative de fréquence de 7.10^{-11}. La protection de la chaîne de multiplication vis-à-vis des variations importantes et rapides de température s'avère indispensable, au moins dans les premiers étages. Nous donnerons une vérification expérimentale de l'importance majeure des paramètres thermiques.

2° **Bruit des multiplicateurs de fréquence.** — La complexité des problèmes de bruit dans un ensemble de multiplication est introduit par le comportement essentiellement non linéaire du dispositif. L'évolution du bruit dans l'ensemble de multiplication en l'absence de signal d'entrée n'apporte aucune lumière sur le comportement normal. Pour des signaux faibles, chaque étage est linéaire et tout se passe comme si le gain global était nul. Le bruit de sortie se limite aux fluctuations du courant plaque du dernier étage de multiplication. En fonctionnement normal, le bruit entraîne une modulation d'amplitude et de phase du signal d'entrée, et nous recherchons une estimation des fluctuations de phase du signal de sortie de la chaîne, l'oscillation d'entrée étant supposée monochromatique. Considérons un étage multiplicateur fonctionnant en classe C, comportant dans la grille un circuit accordé à une fréquence f_o, et dans la plaque un filtre à la fréquence nf_o. Nous n'envisageons tout d'abord que le bruit thermique de l'étage d'entrée, puis nous étudierons l'influence du bruit de grenaille de la lampe multiplicatrice.

Le fonctionnement du multiplicateur introduit une relation de phase constante entre la tension de grille et la tension plaque supposée parfaitement filtrée :

$$\Phi_p = n\Phi_g + \varphi$$

n facteur de multiplication de l'étage.

Soit $A_o \cos \omega_o t$ le signal à multiplier. Le circuit de grille est suffisamment sélectif pour que nous puissions faire une décomposition de Rice du bruit $e(t)$ (28) :

$$e(t) = x(t) \cos \omega_o t - y(t) \sin \omega_o t$$

$x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions lentement variables vis-à-vis du signal $A_o \cos \omega_o t$. Le fonctionnement en classe C exige une valeur élevée de l'amplitude A_o, et nous sommes toujours dans le cas où l'amplitude du bruit est très faible vis-à-vis de A_o. On en déduit les fluctuations de phase $\Delta\Phi_g$ introduites par le terme en quadrature $y(t)$:

$$\overline{\Delta\Phi_g^2}^{1/2} = \frac{\overline{y(t)^2}^{1/2}}{A_o} = \frac{(4KRT\Delta f_o)}{A_o}$$

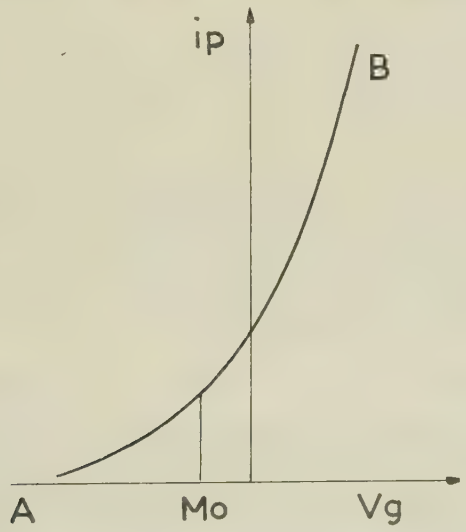
Δf_o est la bande passante du circuit d'entrée, R l'impédance réelle à la résonance.

Cette formule est appliquée à un étage 5.15 MHz, premier élément d'une chaîne de multiplication conduisant jusqu'à 225 MHz dans le domaine des radiofréquences. Les valeurs numériques sont les suivantes :

$$R = 15\ K \qquad A_o = 15\ V \qquad f_o = 100\ KHz$$

Ceci permet d'attribuer à $\overline{\Delta\Phi_g^2}^{1/2}$ une valeur proche de 3.10^{-7} rad.

Le courant plaque i_p est bien entendu une fonction non linéaire de la tension d'entrée V_g. Sur la caractéristique $i_p = f(V_g)$ de la lampe, le point de fonctionnement M parcourt un arc étendu AB autour du point de repos M_o (fig. ci-après). Les fluctuations dues au bruit sont très faibles vis-à-vis du courant moyen de plaque, et nous pouvons admettre qu'elles n'affectent qu'une faible partie de la courbe AB autour du point de fonctionnement M_o. On assimile cette portion d'arc avec un segment de droite : autrement dit, la tension plaque $V_p(t)$ en présence du bruit s'obtient en ajoutant un terme de perturbation $e(t)$ au régime non perturbé, cette correction est une fonction linéaire des fluctuations de la tension d'entrée.



L'effet de grenaille de la lampe multiplicatrice est traduit par une résistance équivalente de bruit R_e placée dans le circuit de grille. Avec l'hypothèse précédente, on peut admettre qu'elle introduit des fluctuations $\overline{i_p^2}$ du courant de plaque.

$$\overline{i_p^2} = 4KR_eT\Delta f_n S^2$$

S : pente de la lampe.

Δf_n : largeur de bande du circuit sélectif de plaque.

On en déduit la tension de bruit qui s'ajoute à l'harmonique de fréquence nf_o dans le circuit plaque.

$$\overline{e_p^2} = 4K(R_e)T\Delta f_n S^2(Q^2r)^2$$

Q^2r est la résistance à la résonance du circuit de plaque.

Il est intéressant de comparer ce bruit au bruit thermique $\overline{e'_p{}^2}^{1/2}$ engendré par la résistance du circuit d'accord de plaque. Nous obtenons :

$$\frac{\overline{e_p^2}}{\overline{e'_p{}^2}} = \alpha^2 = (Qrs)^2 \frac{R_e}{r}$$

r : résistance série du circuit de plaque.

L'application numérique de cette formule au premier étage de nos chaînes de multiplication permet d'attribuer à α^2 une valeur voisine de 80 lorsque la lampe multiplicatrice est une 6 AK5 ; pour un multiplicateur à triode, $\alpha^2 \backsimeq 30$. Dans tous les cas, le bruit de grenaille est largement prépondérant vis-à-vis du bruit thermique du circuit de charge de plaque.

La valeur de $\overline{(\Delta\Phi_p^2)}^{1/2}$ est de l'ordre de 5.10^{-6} rad. pour un étage multiplicateur à pentode. On obtient $2{,}5.10^{-6}$ avec une double triode 12 AT7. Ces variations de phase deviennent supérieures à celles qui sont introduites par le circuit d'entrée.

En effet, $\overline{(n\Delta\Phi_g^2)}^{1/2} \backsimeq 10^{-6}$ rad.

n facteur de multiplicateur du premier étage.

Si on considère une suite d'étages de multiplication, le carré moyen des fluctuations de phase introduites par le bruit de grenaille de chaque lampe est proportionnel à la bande passante du circuit sélectif de plaque. En général, la largeur de bande relative $\Delta f/f$ des filtres varie peu aux fréquences radioélectriques. Dans ces conditions, les formules précédentes indiquent que le bruit de phase introduit par un étage de multiplication est dans un rapport $(n)^{-1}/^2$ par rapport aux fluctuations de l'étage précédent, qui ont subi une multiplication n. Dans une suite d'étages à caractéristiques identiques, le seul bruit à considérer est celui des premiers étages de multiplications.

Nous pouvons estimer les fluctuations de phase introduites à la fréquence du Maser par un signal qui traverse une chaîne de multiplication. Nous partons d'un signal à 5 MHz. Le facteur de multiplication, proche de $1{,}6.10^3$ entre 15 es 23 870 MHz, introduit des fluctuations de phase qui sont de l'ordre de 10^{-2} rad. Expérimentalement, nous trouvons des valeurt qui sont d'un ordre de grandeur supérieur, elles peuvent être attribuées aux phénomènes thermiques. L'effet du bruit des lampes ou du bruit thermique sur les fluctuations de phase du signal de sortie d'un ensemble de multiplication ne devient appréciable que lorsque le facteur de multiplication atteint ou dépasse 10^4.

1° **Chaines de multiplication en radiofréquence.** — Nous utilisons des chaînes de multiplication qui conduisent, dans le domaine des radiofréquences, de 100 kHz à 225 MHz. Nous avons deux ensembles distincts : une première chaîne délivre un signal à 5 MHz en partant d'un quartz à 100 kHz ; nous utilisons également dans ce domaine un multiplicateur 1 MHz - 5 MHz qui nous permet d'utiliser un quartz à 1 MHz (Q1).

A 5 MHz, nous utilisons un quartz oscillateur auxiliaire qui peut être asservi en phase sur les signaux de sortie des chaînes de multiplication précédentes (Q5).

Un deuxième ensemble de multiplication est situé également dans la gamme des radiofréquences, entre 5 MHz et 225 MHz. On utilise ensuite des multiplicateurs à cristaux.

Nous avons construit plusieurs ensembles de multiplication. Les uns utilisent des doubles triodes en montages symétriques, d'autres des pentodes en montages asymétriques. Entre 5 et 225 MHz, nous avons deux étages tripleurs 5-15 MHz et 15-45 MHz et un étage quintupleur 45-225 MHz. Seul le dernier étage des chaînes de multiplication, à 225 MHz, est muni d'un amplificateur qui permet de délivrer une puissance suffisante sous une impédance convenable au multiplicateur à cristal.

Chaque chaîne de multiplication est alimentée extérieurement par une haute tension dont le filtrage est particulièrement soigné, le courant de chauffage peut être délivré par une batterie pour minimiser la modulation de phase à 50 Hz.

2° **Multiplicateur en hyperfréquence.** — Dans le domaine des hyperfréquences, nous avons adopté une solution simple en utilisant un multiplicateur à cristal qui permet de passer directement dans la bande X par sélection du 53e harmonique de la sortie à 225 MHz de la chaîne de multiplication. Le guide d'onde sélectionne les harmoniques situés au-dessus de la fréquence de coupure. La puissance délivrée est évidemment très faible. Page (29) a montré que la puissance maximum P_n recueillie à l'harmonique n dans un multiplicateur utilisant une résistance non linéaire idéale ne peut dépasser P_1/n^2, P_1 étant la puissance convertie aux autres fréquences. Leenov et Uhlir (30) ont calculé les pertes de conversion d'une résistance non linéaire. Ils obtiennent finalement les pertes minimum L_n :

$$L_n = 10 \log \frac{R_G + R_S}{R_G} - 20 \log \frac{2}{\pi} \frac{\sin (n - 1)\pi/2n}{n^2 - 1} \qquad n \text{ impair}$$

R_G et R_S sont les résistances non linéaires et la résistance série du cristal. Le premier terme dépend de la polarisation.

On obtient, pour le 53e harmonique, une perte de conversion minimum voisine de — 75 dB.

Nous avons mesuré la puissance délivrée par le 53_e harmonique pour une puissance d'entrée à 225 MHz voisine de 0,2 W. Nous obtenons 4.10^{-9} watt. Les pertes de conversion réelles sont donc égales à — 77 dB.

Le bruit d'un cristal est caractérisé par son importance et sa complexité. Il entraîne des fluctuations de phase du signal lorsqu'il fonctionne en multiplicateur. Dans notre application, la contribution du cristal aux fluctuations de phase est négligeable vis-à-vis du bruit de phase introduit par les premiers étages de la chaîne de multiplication qui le précède.

Nous vérifierons expérimentalement cette propriété.

3° **Mesure des fluctuations de phase.** — Les fluctuations de phase produites par une chaîne de multiplication sont étudiées par une méthode de battement, méthode que nous utilisons également pour mesurer la fréquence du Maser et étudier son bruit de phase. Il s'agit d'éliminer les fluctuations du signal introduit à l'entrée de la chaîne, le seul moyen consiste à utiliser deux ensembles de multiplication identiques opérant avec le même signal d'entrée, puis à effectuer une comparaison de phase des signaux de sortie. Nous avons, suivant ce principe, effectué une étude expérimentale des variations de phase de la chaîne de multiplication qui intervient dans notre étude, entre 5 MHz et 11 925 MHz. Chaque ensemble de multiplication que nous avons décrit est réalisé en double exemplaire. Ils sont attaqués à l'entrée 5 MHz par le signal provenant d'un quartz oscillateur. Il s'agit en général du quartz utilisé pour l'analyse spectrale ; mais ce point présente peu d'importance et on vérifie aisément qu'un signal quelconque présentant toutefois une stabilité suffisante pour demeurer au centre de la bande passante des circuits d'accord n'influe pas sur le résultat des mesures. Le Klystron X13, qui joue le rôle d'oscillateur local vis-à-vis du 53e harmonique de la sortie à 225 MHz de chacune des deux chaînes conventionnelles, attaque, par l'intermédiaire d'un T magique, deux mélangeurs symétriques. L'ensemble du dispositif, notamment le Klystron, est celui-là même qui est utilisé pour les mesures spectrales. Le Klystron est donc accordé à 11 919,5 MHz. La sortie des mélangeurs symétriques à 5,5 MHz est envoyée sur des préamplificateurs à entrée symétrique qui éliminent le bruit propre du Klystron. Ils sont munis d'amplificateurs écrêteurs qui suppriment toute modulation d'amplitude (fig. IX).

Schéma des mesures de fluctuations de phase

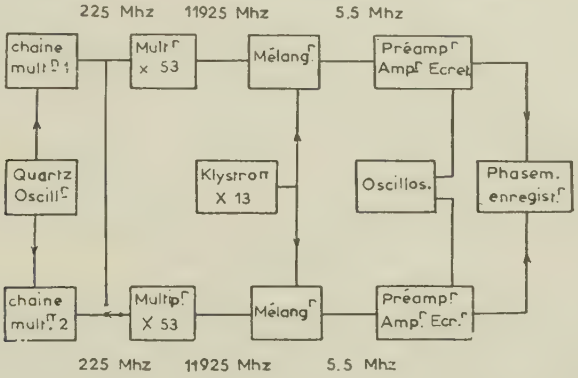


Fig. 7

Les fluctuations de phase du battement entre les signaux à 5,5 MHz peuvent être étudiées, soit à l'aide d'un oscilloscope en formant une figure de Lissajoux, ou en utilisant un tube double trace, soit par enregistrement en utilisant un phasemètre. Le phasemètre, classique, présente une caractéristique amplitude-fréquence pratiquement linéaire sur toute sa gamme de variation. L'étalonnage du phasemètre est effectué avec une précision de $\pm 5\%$ par comparaison avec les mesures oscillographiques. Cette précision est largement suffisante pour une évaluation des fluctuations moyennes de phase. La constante de temps de l'enregistreur est voisine de 1 seconde. L'estimation des variations de phase par l'emploi d'un oscilloscope permet de mettre en évidence les fluctuations rapides, la seule limitation est introduite par la constante de temps du phasemètre, nous avons choisi 10^{-3} s.

Le résultat des mesures est rapporté à une seule chaîne de multiplication en supposant l'égalité et la non-corrélation des variations de phase introduites par chaque ensemble. C'est une hypothèse normalement justifiée mais qui appelle parfois quelques restrictions : c'est ainsi que l'influence commune des variations de la tension du secteur peut introduire un facteur de corrélation ; on vérifie aisément l'importance mineure de ce phénomène pour une alimentation convenablement stabilisée. La sensibilité des chaînes de multiplication apparemment identiques à des facteurs macroscopiques, tels que la modulation à 50 Hz ou 100 Hz peut varier dans d'assez grandes limites, mais ce phénomène peut être décelé par l'analyse spectrale ou par l'emploi de trois chaînes testées deux par deux.

Résultats des mesures. — Nous donnons (fig. 8, 9 et 10) les résultats des mesures des fluctuations de phase à la sortie de deux ensembles de multiplication 5–11 925 MHz. Les chaînes de multiplication dans le domaine des radiofréquences, entre 5 et 225 MHz, utilisaient, soit des pentodes en montage asymétrique, soit des triodes en montage symétrique (fig. 10). On constate dans les deux cas l'importance des variations lentes de phase. Elles peuvent atteindre 1 radian sur des périodes de l'ordre de la minute. Le montage asymétrique est légèrement plus sensible aux facteurs thermiques que le montage symétrique. Ces enregistrements permettent le calcul de la valeur moyenne, sur une période T_0, du déphasage $\Delta\varphi$:

$$\overline{\Delta\varphi} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \frac{d\varphi(t)}{dt}\, dt$$

Pour $T_0 = 2$ s $\quad \overline{\Delta\varphi} = 10^{-1}$ rad.

Cette valeur correspond, sur la même période, à des fluctuations relatives $\Delta f/f$ de la fréquence.

$$\Delta f/f = \Delta\varphi/2\pi.\Delta t.f \backsimeq 7.10^{-13}$$

En supposant l'indépendance du bruit des deux chaînes de multiplication, on obtient des fluctuations de fréquence entraînant une erreur relative proche de 5.10^{-13}. Nous constatons que la chaîne de multiplication introduit des variations de fréquence qui ne sont pas négligeables vis-à-vis de celles dues au bruit du Maser, mesurées avec la même constante de temps. Nous verrons, par contre, qu'elles demeurent bien inférieures aux fluctuations de phase de l'oscillateur à quartz, proches de 10^{-11} en valeur relative dans les mêmes conditions. Les fluctuations rapides de phase sont mises en évidence par une méthode oscillographique. Nous employons deux procédés : le premier consiste à utiliser directement les deux signaux

Chaine de multiplication 5 - 11925 Mhz
Fluctuations de phase

Chaine de multiplication 225 - 11925 Mhz
Fluctuations de phase

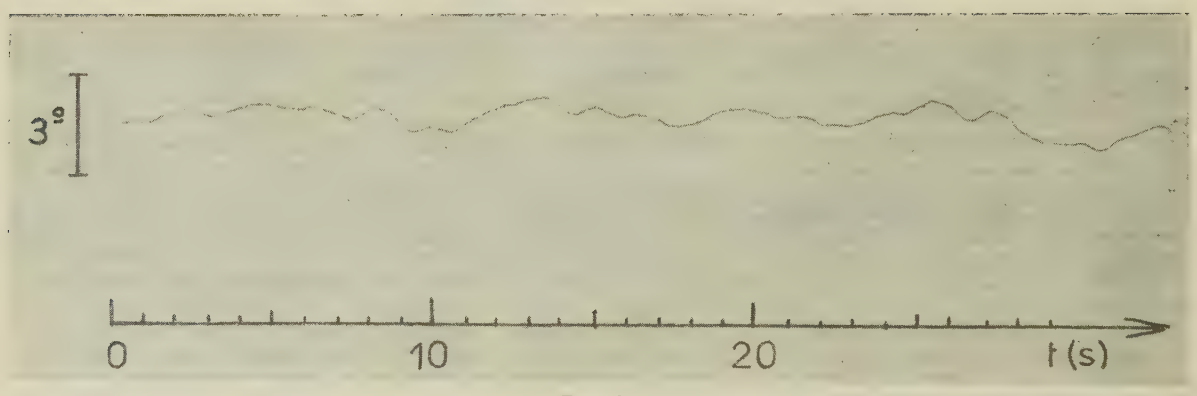


Fig. 8

à 5,5 MHz provenant du battement entre la sortie des chaînes 5–11 925 MHz et le klystron X13 et à les observer sur un oscilloscope pourvu d'une commutation électronique. Les fluctuations se traduisent par une oscillation de la trace d'un des signaux par rapport à l'autre trace correspondant au signal synchronisé. L'enregistrement photographique permet de calculer la variance des fluctuations de phase, la constante de temps étant égale à 12 μs et la durée d'enregistrement dépendant du temps de pose, en général 1/10 à 1/2 seconde. On obtient 0,05 radian. L'imperfection de la reproduction (fig. 11) ne permet qu'une vérification grossière de cette mesure. Un deuxième procédé consiste à observer à l'oscilloscope la sortie du phasemètre. On met en évidence, dans le bruit de phase, une modulation cohérente à 50 Hz et aux fréquences harmoniques du 50 Hz, l'amplitude de cette modulation est responsable de la majeure partie des fluctuations observées précédemment. Elle peut atteindre 0,04 radian, ce qui se traduit, du point de vue spectral, par une raie située à — 40 dB en dessous de la raie centrale. C'est un résultat que nous reprendrons lors de l'étude des raies latérales des spectres d'oscillateurs à quartz (II[e] partie). L'amplitude moyenne des fluctuations aléatoires est d'un ordre de grandeur plus faible (5.10^{-3} rad.).

Nous avons étudié indépendamment les variations de la phase du signal dues au bruit des multiplicateurs à cristaux, c'est-à-dire entre 225 et 11 925 MHz. Dans cette expérience, la sortie d'une des chaînes de multiplication 5–225 MHz attaque simultanément deux multiplicateurs identiques.

Les fluctuations rapides de phase, tant cohérentes (modulation à 50 Hz) qu'aléatoires, sont négligeables par rapport à celles observées précédemment. Nous présentons (fig. 8 et 12) le résultat des mesures effectuées à l'enregistreur. Les fluctuations moyennes ne dépassent pas 10^{-2} rad. pour une période de mesure de l'ordre de la minute. Nous mettons en évidence une dépendance très nette entre ces variations de phase et les fluctuations de fréquence du klystron X13. Nous rappelons que celui-ci est asservi en fréquence sur le 53[e] harmonique d'un signal à 225 MHz. Nous enregistrons simultanément les fluctuations de phase $\varphi(t)$ et les fluctuations de fréquence $f(t)$ du battement à 5,5 MHz entre l'harmonique du quartz et le klystron, fluctuations qui peuvent être attribuées uniquement au klystron lorsque l'on utilise un quartz très stable.

Nous calculons aisément la fonction d'intercorrélation de $\varphi(t)$ et $f(t)$. Pour $\tau = 0$, le coefficient d'intercorrélation depasse 0,8. C'est dire que la quasi-totalité des fluctuations de phase sont dues aux variations de fréquence du klystron. Ce phénomène ne pouvait être mis en évidence dans notre calcul précédent par suite des hypothèses simplificatrices que nous avions faites : absence d'intermodulation, filtrage parfait. De toute façon, l'erreur relative sur la frequence entrainée par ces fluctuations est tout à fait négligeable. En effet :

$$\Delta f/f \lesssim 1{,}3.10^{-13}$$

Nous voyons par là la validité de la méthode du Klystron auxiliaire pour les mesures de fréquences ou les mesures spectrales.

Chaine de multiplication 5 - 11925 Mhz

montage dissymétrique à pentodes

Fluctuations de phase

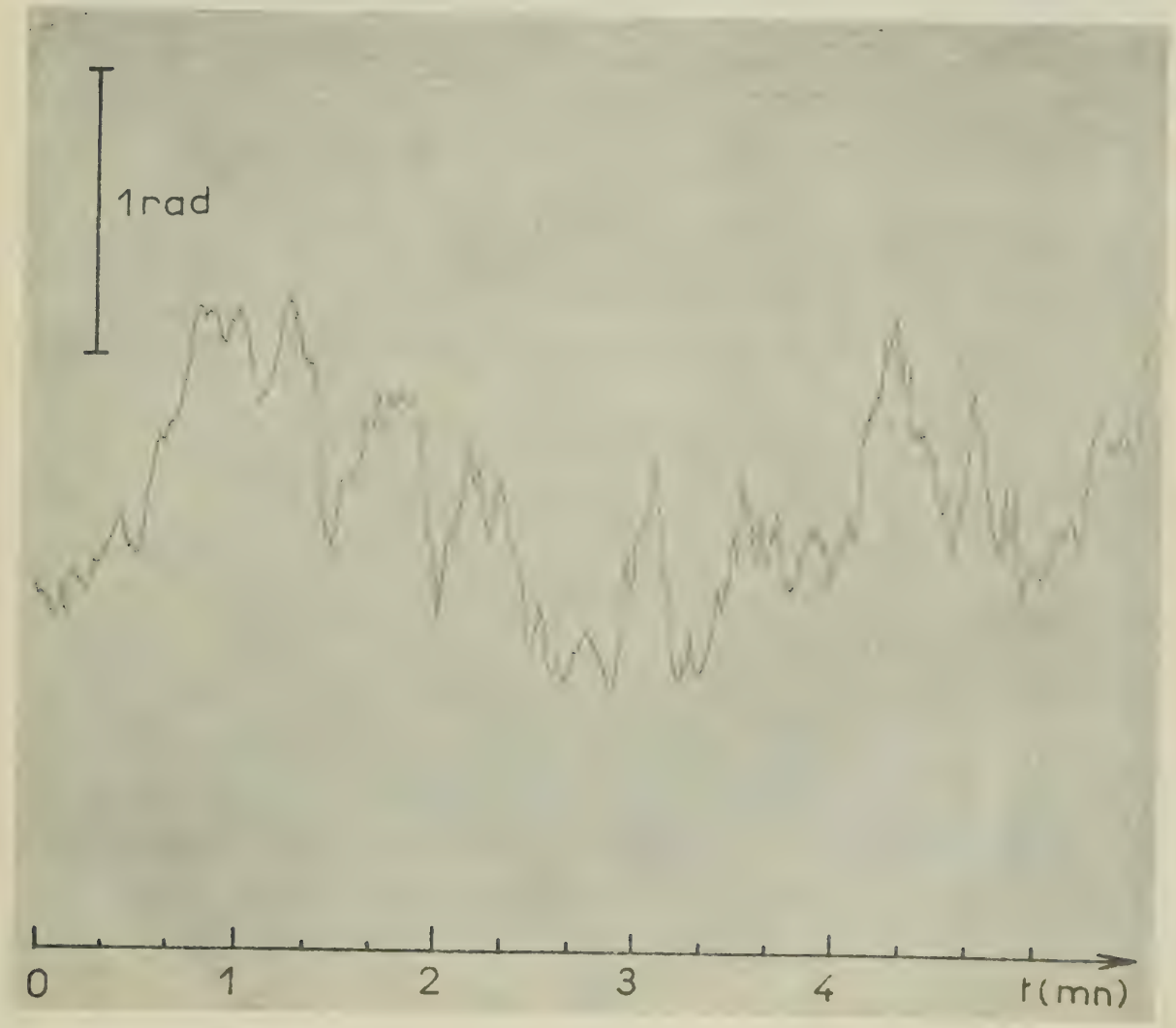


Fig 9

Chaîne de multiplication 5 - 11925 Mhz

montage symétrique à triodes

Fluctuations de phase

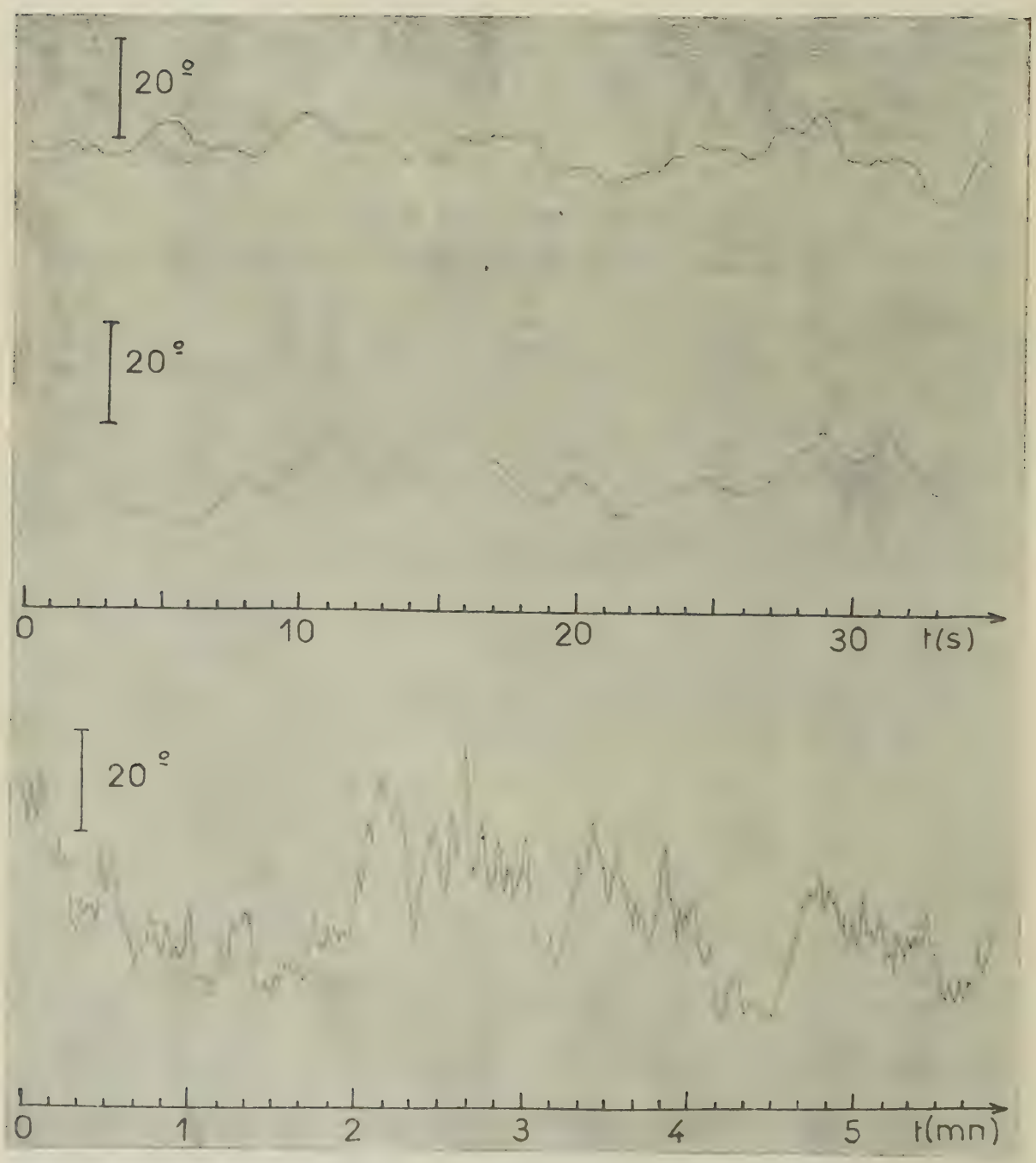


Fig. 10

Chaînes de multiplication symétriques 5 - 11925 Mhz

Fluctuations rapides de phase

Observation oscillographique

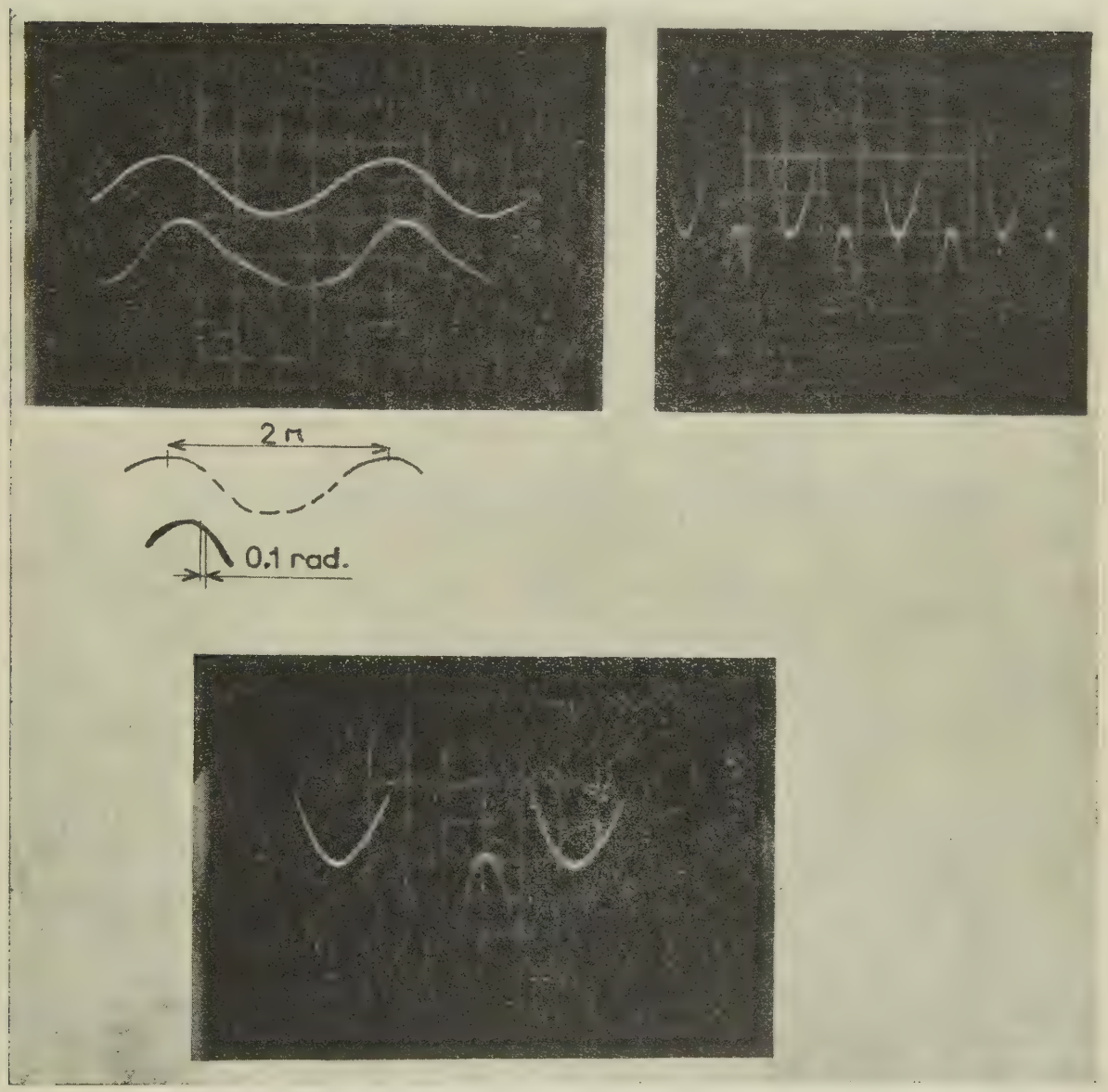
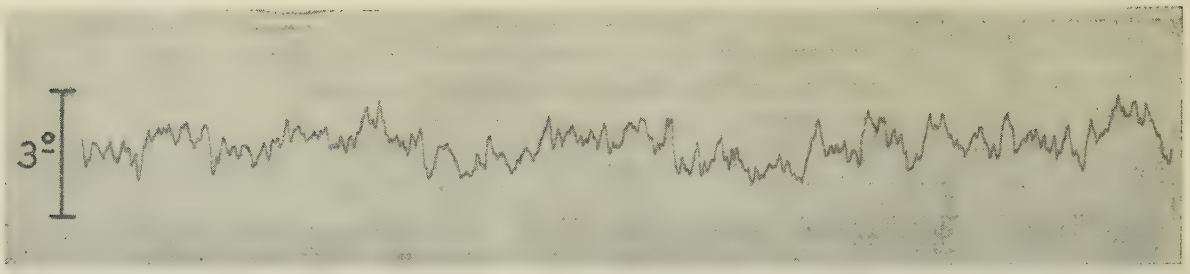


Fig. 11

Chaine de multiplication 225 - 11925 Mhz

φ (t) Fluctuations de phase



f (t) Fluctuations de fréquence du Klystron

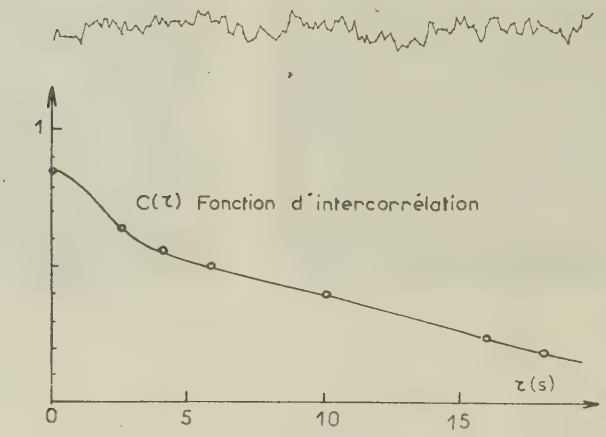


Fig. 12

B. — L'analyseur de spectre à Maser.

a) **Le Maser :**

1° **Caractéristiques générales.** — Nous utilisons pour nos expériences un ensemble de deux Masers identiques pouvant fonctionner indépendamment lors des mesures d'analyse spectrale ou simultanément pour l'étude du battement entre Masers.

Chaque Maser comporte une enceinte en laiton où règne un vide très poussé de l'ordre de 10^{-6} mm Hg. A l'intérieur de l'enceinte on trouve successivement, centrés sur un même axe longitudinal, un gicleur, un focaliseur et une cavité hyperfréquence. Un ensemble de pièges à azote liquide permet d'éliminer les molécules d'ammoniac non axiales ou celles qui ont traversé la cavité. Une jauge à ionisation permet de contrôler le vide à l'intérieur de l'enceinte. L'ensemble est complété par un groupe de pompage comprenant une pompe primaire, commune aux deux Masers, et une pompe à diffusion d'huile. Une réserve à vide permet d'arrêter la pompe primaire pendant plus d'une heure tout en conservant un vide suffisant pour le fonctionnement correct du Maser. On a la possibilité d'effectuer des expériences en éliminant les vibrations mécaniques inévitables qu'entraîne le fonctionnement de la pompe primaire. L'ammoniac anhydre est contenu dans une réserve sous une pression initiale voisine de 5 kg, ce qui assure une autonomie de fonctionnement de quelques dizaines d'heures. Nous avons remarqué que des variations de pression dans l'enceinte, souvent suffisantes pour entraîner des fluctuations de fréquence, peuvent être dues à la présence de molécules d'air résiduelles dans la réserve à ammoniac. Nous purifions systématiquement l'ammoniac en portant la réserve à la température de l'azote liquide et en y réalisant le vide secondaire. Dans ces conditions, on vérifie qu'un débit d'ammoniac quatre ou cinq fois supérieur au débit normal n'entraîne pas de modifications appréciables de la pression de l'enceinte du Maser. La pression d'ammoniac est réglée en amont du gicleur par un robinet à pointeau, elle est alors mesurée par une jauge de Pirani.

2° **Le gicleur.** — Le gicleur a pour but la formation d'un jet de molécules parallèles à l'axe du focaliseur. Il est caractérisé par la distribution angulaire des molécules à sa sortie. On peut le considérer comme un dispositif introduisant un gain de directivité par rapport au simple trou percé dans une paroi d'épaisseur négligeable. Le gain dépend du système utilisé. Celui-ci est souvent constitué par un ensemble de canaux parallèles très fins, la section de chaque canal étant de l'ordre de 25.10^{-4} mm². Il peut aussi bien être formé d'un cylindre percé d'un ou plusieurs trous de diamètre proche de 1/10 mm. Une étude expérimentale de ces gicleurs a montré que le rendement ne varie guère d'un système à l'autre (18), on note cependant une efficacité légèrement supérieure du gicleur à trous fins et multiples. La simplicité de réalisation du gicleur, constitué par un cylindre de teflon percé d'un seul trou axial, nous a décidé à l'adopter.

3° **Le focaliseur.** — Le focaliseur comporte un nombre pair de barres parallèles régulièrement réparties suivant les génératrices d'un cylindre. Nous utilisons un sélecteur d'état à huit pôles, adopté par de nombreux auteurs (14, 16). Les barres sont fixées sur des plaques de teflon qui servent également à l'isolement et supportent le dispositif d'arrivée de la haute tension. Le focaliseur sépare les molécules d'ammoniac en deux groupes, les molécules qui sont pour la plupart dans l'état inférieur divergent vers l'extérieur et sont éliminées par un piège à azote liquide qui entoure complètement le focaliseur. Les molécules dans l'état supérieur sont focalisées lorsque leurs vitesses radiales v_r satisfont à la relation suivante :

$$v_r^2 \leqslant \frac{hf_o}{m} \left\{ \left[1 + \left(\frac{2}{hf_o} \frac{MK}{J(J+1)} \mu E \right)^2 \right]^{1/2} - 1 \right\}$$

Lorsque $\frac{hf_0}{2} \ll \frac{MK}{J(J+1)} \mu E$, la relation précédente se réduit à la suivante :

$$v_r \leqslant \left[\frac{2}{mhf} \right]^{1/2} \frac{MK}{J(J+1)} \mu E$$

Le nombre de molécules focalisées est dans ce cas proportionnel à M^2E^2. On peut montrer qu'il est pratiquement indépendant de la longueur du focaliseur pour une valeur suffisante de la tension de focalisation, de l'ordre d'une dizaine de kilovolts. Nous utilisons d'ailleurs un sélecteur d'état très long (460 mm). Au prix de certaines précautions, la haute tension peut être portée à 15 ou 20 kV sans claquage. L'amplitude d'oscillation de nos Masers, la tension d'amorçage ont été étudiées en fonction des caractéristiques de l'ensemble gicleur–focaliseur et les résultats ont été publiés (18).

4° **La cavité.** — La cavité doit avoir un facteur de qualité élevé et une très bonne stabilité de fréquence. Nous utilisons une cavité cylindrique en cuivre résonnant sur le mode TM 010 qui fournit les meilleures conditions d'oscillation (10). Le diamètre de la cavité est ajusté mécaniquement à une valeur telle que la fréquence de résonance soit atteinte pour une température comprise entre 55 et 65 °C. Après divers essais, nous nous sommes arrêtés à un type de thermostat comportant un système auto-oscillant ; l'amplitude d'oscillation est réglée par un pont comprenant deux fils résistants enroulés directement sur la cavité. Le coefficient de température, très faible pour l'un, est très élevé pour l'autre, l'équilibre du pont n'est réalisé que pour une valeur déterminée de la température de la cavité. L'enroulement du fil transportant le courant continu de chauffage est conçu de façon à éviter un effet Zeeman parasite. Ce système est caractérisé par son efficacité, sa simplicité et sa rapidité de réponse. La cavité est centrée et isolée thermiquement de l'enceinte par des bagues en teflon. L'isolement du guide de sortie est réalisé par une coupure, le centrage et la continuité radioélectrique étant assurés par des brides à pièges.

5° **La détection.** — La détection fait appel au battement du Maser avec le deuxième harmonique d'un Klystron X13. Nous utilisons un même Klystron pour le groupe des deux Masers. Les deux mélangeurs sont situés symétriquement dans les branches couplées d'un té hybride alimenté par le Klystron X13. Les multiplicateurs et mélangeurs classiques utilisent des cristaux 1 N 26. Nous avons placé, entre chaque mélangeur et la cavité correspondante, un isolateur à ferrite de 30 dB d'atténuation inverse. Nous évitons ainsi l'entraînement de la fréquence de la cavité lors du réglage des circuits hyperfréquence. Ceci permet aussi d'obtenir un battement de fréquence très basse, de l'ordre de quelques cycles, entre deux Masers sans auto-accrochage.

6° **Bruit du Maser - Etude expérimentale.** — On vérifie la pureté spectrale d'un Maser à ammoniac en étudiant ses fluctuations de fréquence. La méthode la plus simple utilise le battement en basse fréquence de deux Masers identiques.

Nous employons un Klystron X13 qui sert d'oscillateur local pour les deux Masers. Le mélange est obtenu par une amplification moyenne fréquence à 30 MHz suivie d'une détection. La fréquence du battement peut être réglée en agissant sur l'un des thermostats, entre quelques centaines de Hz et quelques Hz. Un filtre passe-bas, ayant 500 Hz de bande passante, suit la détection. Il améliore le rapport signal/bruit qui reste supérieur à 10 dans les conditions de foctionnnement les plus défavorables. Le signal de battement peut être étudié directement en formant sur un oscilloscope une figure de Lissajoux avec un générateur auxiliaire. Nous faisons les mesures quantitatives en utilisant, soit un compteur, soit un discriminateur suivi d'un enregistreur. Dans le premier cas, nous mesurons la fréquence moyenne intégrée sur 1 seconde ou 10 secondes, avec une précision qui atteint $\pm$ 1 Hz ou $\mp$ 1/10 Hz. Il est préférable d'effectuer des mesures de la période du signal de battement, le résultat est obtenu avec toute la précision désirée.

Dans le second cas, le temps d'intégration de la fréquence est donné par la constante de temps de l'enregistreur, de l'ordre de 1 seconde. Nous avons effectué la mesure de la variance de la fréquence pour des durées d'enregistrement voisines de 30 secondes. La valeur relative moyenne oscille entre 2 et 4.10^{-12} suivant les conditions expérimentales (fig. 13, 14). Les variations lentes de fréquence, de périodes supérieures à 30 secondes, peuvent être attribuées aux variations des paramètres expérimentaux, principalement aux modifications de la température de la cavité.

Nous pouvons admettre l'indépendance des deux Masers, et par suite en déduire une valeur moyenne de la variance de la fréquence comprise entre 1,5 et 3.10^{-12}.

Une mesure portant sur la période du battement des deux Masers fait intervenir une constante de temps τ pouvant varier entre quelques dixièmes et quelques millièmes de seconde. Les fluctuations de fréquence obtenues par cette méthode vérifient approximativement la loi :

$$\frac{\Delta f^2}{f}^{1/2} = K(\tau)^{-1/2} \qquad \text{(fig. 15)}$$

Nous donnons dans le tableau ci-dessous le résultat des mesures. La valeur théorique des fluctuations relatives de fréquence $\Delta f/f$ est calculée d'après la formule de Shimoda (page 12) en donnant aux paramètres les valeurs suivantes :

$$\theta = \pi/2 \qquad T = 300\ °K \qquad Q_r = 4.10^6$$

La puissance P_1 délivrée par le Maser a été trouvée proche de 10^{-11} watt.

$$\frac{\Delta f^2}{f}^{1/2} \simeq 4.10^{-13}\ (\tau)^{-1/2}$$

Battement de deux Masers

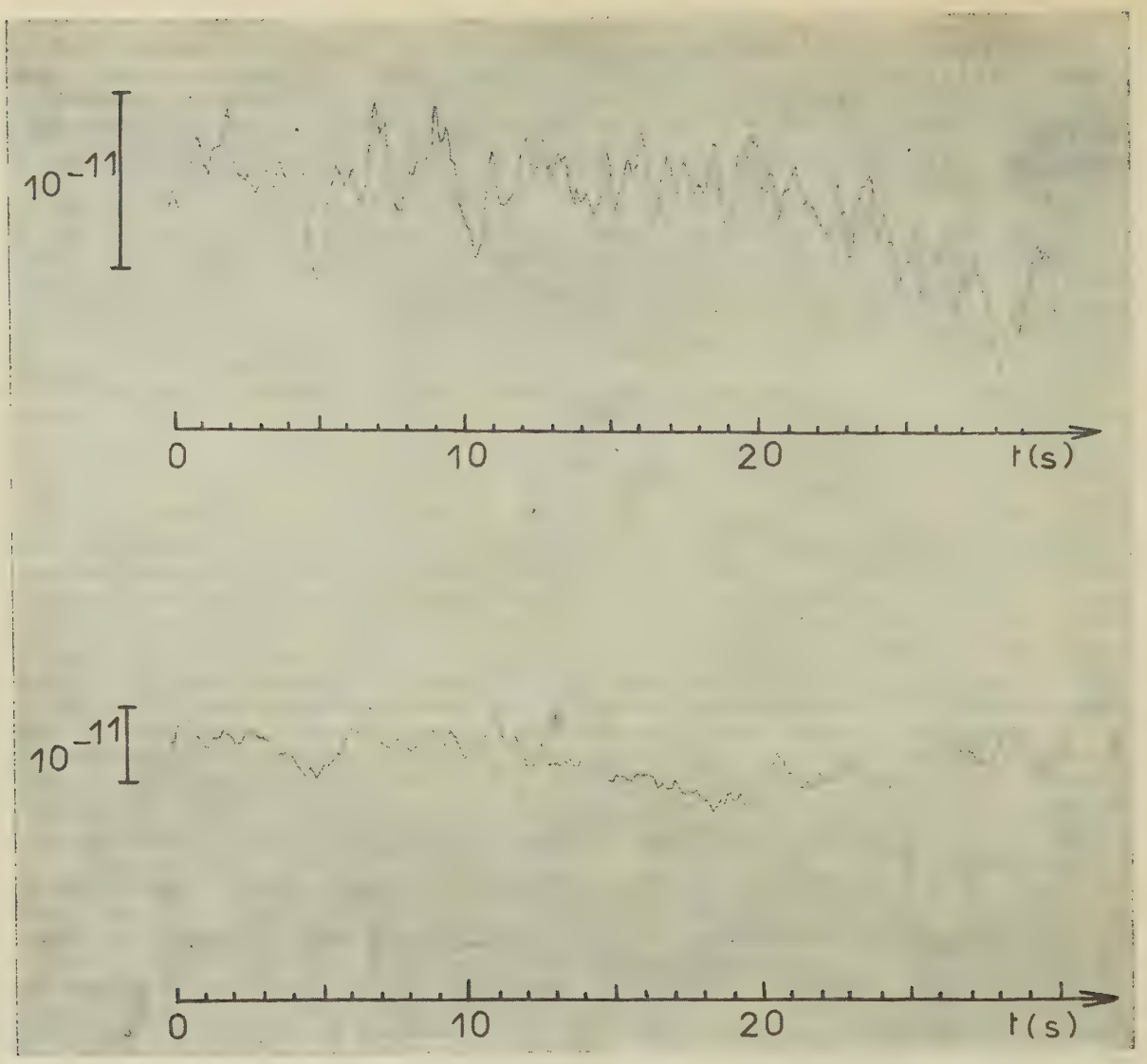


Fig. 13

Battement de deux Masers
Constante de temps : $\tau = 1$ s

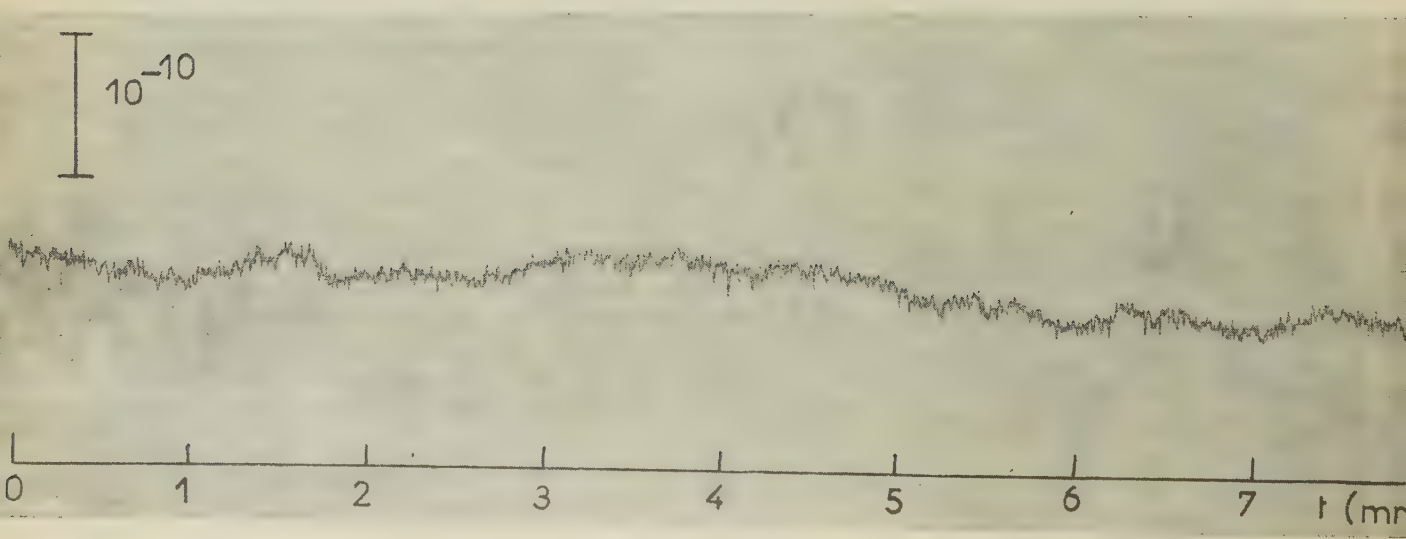


Fig. 14

COMPARAISON DE DEUX MASERS

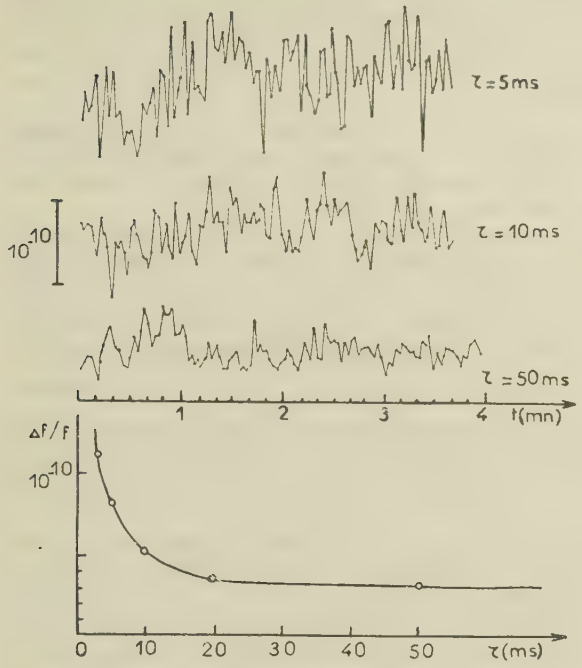


Fig. 15

ANALYSEUR DE SPECTRES
SCHEMA THEORIQUE

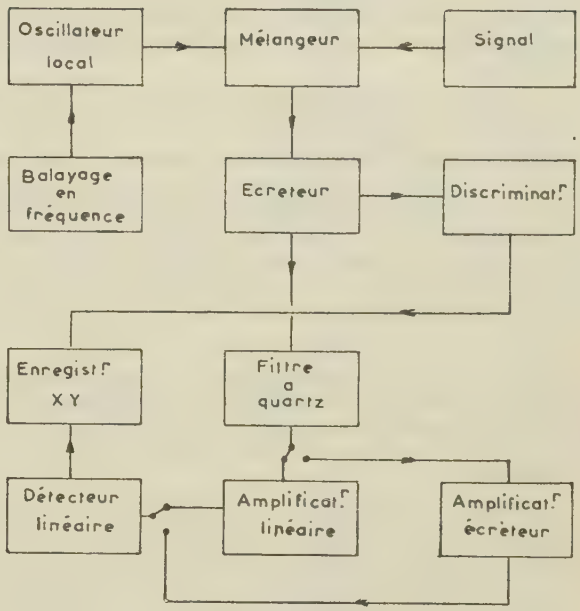


Fig. 16

τ (ms)	Δf/f théorique	Δf/f expérimentale	Δf/f expérimentale / Δf/f théorique
900	$4{,}5.10^{-13}$	2.10^{-12}	4,5
50	2.10^{-12}	$2{,}3.10^{-11}$	11,5
20	$3{,}1.10^{-12}$	$2{,}5.10^{-11}$	8
10	$4{,}4.10^{-12}$	$3{,}6.10^{-11}$	8,2
5	6.10^{-12}	$4{,}3.10^{-11}$	7,2
3,3	8.10^{-12}	8.10^{-11}	10

Les valeurs expérimentales demeurent supérieures aux valeurs théoriques, particulièrement pour les mesures à court terme, effectuées sur la période du battement. Nous pouvons attribuer ces variations aux fluctuations de la pression résiduelle à l'intérieur de l'enceinte ainsi qu'aux variations de la température de la cavité, variations qui ne sont plus négligeables sur une durée de quelques minutes : c'est sur cette période qu'est calculée la variance de la fréquence dans la méthode de mesure de la période du battement des deux Masers.

b) **Caractéristiques de l'analyseur de spectre :**

1° **Caractéristiques générales.** — La fréquence du Maser à ammoniac fonctionnant sur la raie 3-3 est voisine de 23 870.129 KHz. Le système de transposition de fréquence nous délivre finalement un signal à 129 kHz, cette fréquence pouvant varier de quelques kHz suivant la fréquence exacte du quartz utilisé. Le seul point délicat de l'appareillage électronique qui fournit ce signal est le préamplificateur moyenne fréquence centré sur 31 MHz, ou 30 MHz dans le cas de l'accrochage en phase du Klystron. Il a un gain en tension voisin de 1 200, avec un bruit propre ramené à l'entrée de l'ordre du μvolt pour une bande passante de 2 MHz. Le signal du Maser ne dépasse guère 2 à 3 μV à l'entrée du préamplificateur. La grande sélectivité des circuits qui suivent les étages mélangeurs diminue la bande de bruit, et le signal à 129 kHz est finalement délivré sous basse impédance après passage dans un filtre de bande passante voisine de 10 kHz. Le rapport signal/bruit est voisin de 12 à 15 dans les conditions normales de fonctionnement du Maser.

Le filtre analyseur est centré sur 10 kHz. L'oscillateur local qui permet de translater le spectre au voisinage de la fréquence du filtre est accordé sur 120 kHz. Cet oscillateur doit satisfaire à plusieurs conditions. Il doit tout d'abord avoir une bonne pureté spectrale, afin que sa largeur de raie soit négligeable vis-à-vis de la bande passante du filtre analyseur. Ses fluctuations de fréquence doivent être faibles vis-à-vis des fluctuations du signal dont on fait l'analyse spectrale. L'emploi d'un oscillateur à quartz permet de satisfaire aisément à ces conditions, mais il ne faut pas oublier que le rôle principal de l'oscillateur local est l'exploration, grâce à un balayage lent et linéaire de sa fréquence d'oscillation, d'un domaine d'analyse qui doit atteindre plusieurs centaines de hertz, et même quelques kHz pour l'analyse de raies du spectre très éloignées de la raie centrale. Ceci

correspond à une variation relative de fréquence supérieure à 2/100. Un oscillateur à quartz ne peut satisfaire à cette condition, nous avons utilisé un oscillateur à lampes dont la construction a été particulièrement soignée (fig. III). C'est un oscillateur monté dans une double triode dont la deuxième moitié est utilisée en cathode follower pour servir d'étage séparateur. L'ensemble est suivi d'un étage d'amplification puis d'un écrêteur qui élimine la modulation d'amplitude. La tension de sortie de l'étage amplificateur, redressée et filtrée, commande la polarisation de la grille de l'oscillateur et assure une bonne stabilité d'oscillation. Le carré moyen des fluctuations de fréquence, mesuré avec une constante de temps de 1 seconde, ne dépasse pas 0,5[Hz]^2.

On vérifie la pureté spectrale de l'oscillateur en prenant le spectre d'un quartz à 100 kHz, non multiplié, en amenant la fréquence de l'oscillateur local aux environs de 110 kHz. Le spectre obtenu est identique au relevé statique de la courbe de réponse du filtre analyseur, ce qui montre que le spectre de l'oscillateur local a une largeur de raie bien inférieure à celle du filtre. On vérifie également qu'il est exempt de toute raie de modulation.

2° **Balayage en fréquence.** — Le balayage en fréquence est effectué au moyen d'un générateur de dent de scie à transistor. L'amplitude de la variation de tension ainsi que sa durée sont réglables séparément grâce à une série de résistances commutables. La tension de balayage est appliquée avec une polarité convenable sur une diode varicap branchée en parallèle sur le circuit d'accord de l'oscillateur. Nous utilisons une diode à jonction au silicium (THP 911) dont la capacité $C = f(V)$ est voisine de 22 pF pour une polarisation inverse de 4 volts. L'étude de la capacité en fonction de la tension appliquée fait apparaître, pour V compris entre — 1,5 volt et — 8 volts, une loi de variation qui peut être représentée par la fonction $C = k(V)^{-1/2}$ avec une erreur inférieure à 5 %. On en déduit : $\frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{4}\frac{\Delta V}{V}$ Le balayage en fréquence n'est approximativement linéaire que sur une plage restreinte de variation de la fréquence. On le vérifie en enregistrant la variation de fréquence de l'oscillateur local pour diverses valeurs de l'amplitude et de la durée de balayage (fig. VI). La linéarité n'est pas respectée en début de balayage, tout en restant dans les limites acceptables. L'utilisation d'un enregistreur X–Y permet de conserver un étalement linéaire du spectre le long de l'axe des fréquences, et le défaut précédent est sans importance.

Le signal à 129 kHz, amplifié puis écrêté pour éliminer la modulation d'amplitude résiduelle, est envoyé sur un mélangeur à diode qui permet d'effectuer le battement avec l'oscillateur local. Un filtre dont la largeur de bande est légèrement supérieure au domaine analysé maximum ne conserve que les composantes de fréquence voisine de 10 kHz. Il est possible de déplacer la fréquence moyenne du filtre pour relever le spectre du signal dans un domaine très éloigné de la raie centrale. Le signal à 10 kHz est ensuite porté à un niveau constant par un amplificateur suivi d'un écrêteur. Il est envoyé, d'une part sur le filtre à quartz analyseur, d'autre part sur un discriminateur centré sur 10 kHz (fig. IV). La linéarité de ce discriminateur dont la sortie commande le balayage horizontal de l'enregistreur X–Y a été soigneusement ajustée dans une plage de fréquence supérieure à la gamme étudiée. On peut utiliser à ce niveau le signal à 10 kHz pour une mesure exacte de fréquence à l'aide d'un compteur, on vérifie ainsi la fréquence des raies de modulation du spectre. Les performances du discriminateur permettent d'apprécier la fréquence de ces raies par rapport à la raie centrale au 1/100 près, ce qui est suffisant dans la plupart des cas.

3° **Filtre analyseur.** — Les caractéristiques du filtre à quartz, élément essentiel de l'analyseur, dépendent du but poursuivi ainsi que de l'allure générale du spectre analysé. Une étude préliminaire effectuée avec un filtre classique à circuits accordés nous a montré la monochromaticité des spectres d'oscillateurs à quartz qui, à la fréquence du Maser, après une multiplication par un facteur n'excédant pas 10^1 présentent une raie centrale inférieure à la largeur du filtre et un spectre de modulation devenant négligeable à partir de quelques centaines de hertz de part et d'autre de la raie centrale. Nous avons porté nos efforts sur la réalisation d'un système permettant l'analyse fine des composantes centrales du spectre, et nous avons réduit la bande passante du filtre jusqu'à un minimum compatible avec les fluctuations de fréquence du signal à 10 kHz.

Le filtre comprend deux quartz montés en T. La courbe de réponse en fréquence est relevée statiquement en utilisant un générateur très stable dont la fréquence est mesurée au cours de l'expérience avec une précision de l'ordre de 1/10 Hz (fig. 17 et 18). On obtient également la fonction de transfert en utilisant un quartz auxiliaire à l'entrée 129 kHz de l'analyseur et en balayant très lentement en fréquence l'oscillateur local, la vitesse de balayage restant inférieure à 0,3 Hz/seconde pour éviter un élargissement de la courbe de réponse (fig. 19). On vérifie l'identité des résultats obtenus par les deux méthodes. La largeur de bande est voisine de 0,9 Hz à 3 dB. Elle est inférieure à 5 Hz pour une atténuation de 30 dB et à 10 Hz à 45 dB. La dissymétrie du filtre ne dépasse pas 5 % jusqu'à — 20 dB, et 10 % en deçà de — 40 dB. La stabilité des quartz vis-à-vis de la température est suffisante pour éviter une thermostatisation. Ils sont simplement placés dans une enceinte extérieure à l'analyseur pour éviter un échauffement dû au rayonnement des lampes.

4° **Détecteur.** — La sortie du filtre attaque sous forte impédance un étage amplificateur linéaire suivi d'une détection. Nous avons présenté les avantages d'une détection linéaire, et celle-ci ne peut être assurée que pour une valeur minimum de la tension d'attaque. La stabilité de l'amplitude du signal à l'entrée du filtre à quartz jointe à sa monochromaticité assurent à la raie centrale une amplitude pratiquement constante dans les conditions les plus variées. L'amplitude de la déviation du galvanomètre lors du passage sur la raie centrale peut être ajustée en réglant le gain des étages amplificateurs précédant la détection. Nous opérons dans des conditions qui permettent d'assurer une linéarité parfaite de la réponse du détecteur jusqu'à une valeur limite correspondant à une raie dont l'amplitude est située à 30 dB en dessous de la raie centrale. Le problème posé par l'étude des raies dont l'amplitude est inférieure à cette valeur ne peut être résolu que par une amplification supplémentaire. Le passage sur la raie centrale ou même sur des fortes raies de modulation latérales entraîne une déviation excessive du spot du galvanomètre. Pour demeurer dans les limites de l'enregistrement lors du balayage complet du spectre, il faut adjoindre un système écrêteur à tout étage d'amplification supplémentaire. Nous employons un limiteur à diode, la variation de la polarisation détermine le niveau d'écrêtage. La caractéristique d'un tel système ne peut reproduire que d'une façon approchée la forme idéale du limiteur. La tension de sortie V de l'écrêteur qui suit l'étage d'amplification linéaire est fonction linéaire de la tension de sortie du filtre à quartz v pour $V < V_a$, puis la pente de la courbe $V = f(v)$ diminue et s'annule pour $V \geqslant V_m$. La région non linéaire comprise entre V_a et V_m peut difficilement être réduite à moins de 10 % de la valeur de V_m. La caractéristique de réponse de l'ensemble fait apparaître dans ces conditions une région quadratique, puis un domaine linéaire correspondant à la partie utile, et enfin une partie non linéaire ayant l'allure d'une courbe de saturation. Nous avons réalisé un dispositif comportant trois gammes de sensibilité.

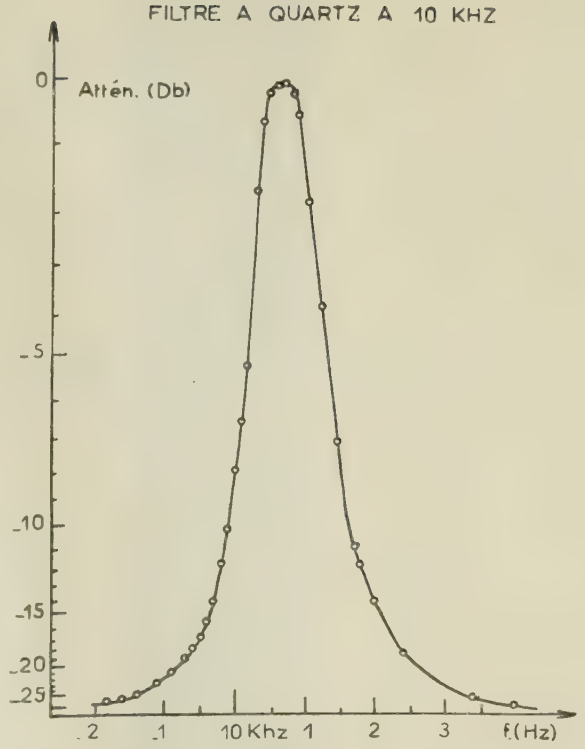


Fig. 17

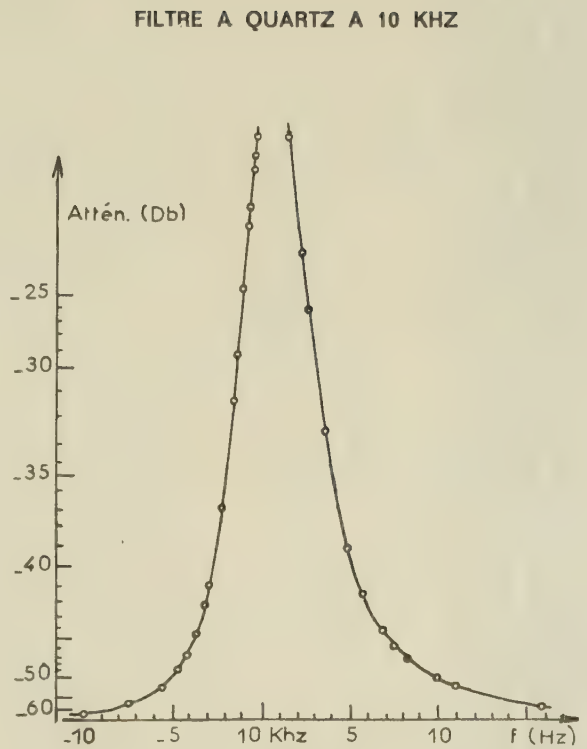


Fig. 18

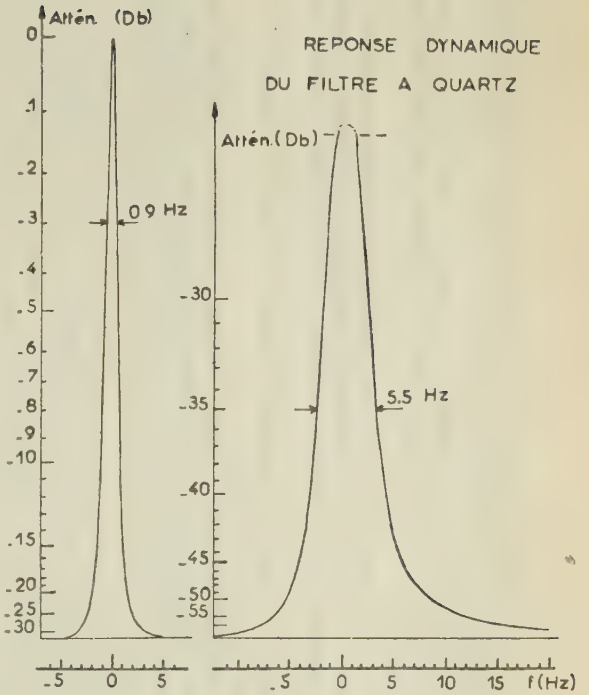


Fig. 19

La gamme (I), gamme normale, correspond à une caractéristique linéaire pour la raie centrale du spectre. Elle permet une étude quantitative des raies dont l'amplitude est comprise entre 0 et — 3 dB par rapport à la raie principale, et une estimation des raies comprises entre — 30 et — 45 dB.

La gamme (II) fait appel à un étage d'amplification supplémentaire dont le gain est réglé de façon que les raies correspondant à la partie linéaire de la gamme (I) soient écrêtées. La région de linéarité est alors comprise entre — 30 et — 75 dB en dessous de la raie centrale.

La gamme (III) conserve la même amplification avant détection que la gamme précédente, mais un écrêtage à un niveau plus bas permet d'augmenter la sensibilité du galvanomètre, elle donne une amplitude appréciable aux raies situées dans la partie linéaire de la gamme (II) entre — 60 et — 75 dB, la limite de détection se trouve rejetée à 80 dB en dessous de la raie centrale.

Le bruit de l'analyseur de spectre est rejeté dans la partie non linéaire de la gamme (III), il est inférieur à une valeur située à 85 dB en dessous de la raie centrale.

5° **Enregistrement des spectres.** — L'appareil le plus commode pour l'enregistrement des spectres est un enregistreur XY. Nous utilisons un appareil SEFRAM. Le déplacement de la table portant le papier d'enregistrement est assuré suivant l'axe des X par un dispositif suiveur de spot. Le galvanomètre qui commande cette voie est attaqué par la sortie du discriminateur à travers une série de résistances commutables qui permettent de régler l'étalement du spectre selon l'axe des fréquences. Le déplacement du scripteur lié à la table d'enregistrement, selon l'axe des Y, est assuré par un système identique. Nous avons ajusté les valeurs des résistances des galvanomètres de façon à nous placer près de l'amortissement critique, en conservant néanmoins un léger « overshoot ». Dans ces conditions, le temps T_o nécessaire pour atteindre la position d'équilibre lorsqu'on applique à l'entrée du galvanomètre sur la voie Y un échelon de courant est voisin de 1,4 seconde, et il suffit d'un temps T_1 égal à 1 seconde pour obtenir une valeur qui ne diffère pas de la valeur à l'équilibre de plus de 5/1 000. Les mêmes mesures effectuées sur la voie X conduisent à des valeurs de T_o et T_1 voisines de 2 secondes et 1,4 seconde. La caractéristique du galvanomètre placé sur la voie Y permet ainsi de respecter l'amplitude des impulsions de courant dont la durée est supérieure ou voisine à 1 seconde. Le respect de la condition qui doit exister entre la vitesse de balayage et la largeur de la courbe de transfert du filtre impose un balayage lent, l'impulsion de courant créée lors du passage sur une raie a une durée supérieure à 1 seconde et la constante de temps du galvanomètre ne constitue pas dans ces conditions un facteur gênant. Il est aisé de constater l'influence du temps de réponse du galvanomètre en faisant varier la vitesse de balayage lors d'une expérience de relevé dynamique de la courbe de réponse du filtre. L'amplitude de la courbe de réponse diminue sensiblement lorsque la vitesse de balayage est supérieure à 1,5 Hz/s. Les relevés des spectres de puissance, particulièrement ceux qui concernent l'étude de la raie centrale, sont effectués avec une vitesse moyenne comprise entre 0,2 et 0,4 Hz/s.

DEUXIÈME PARTIE

I. — Les oscillateurs à quartz - Fluctuations de fréquence et spectre

Une lame de quartz convenablement taillée, soumise à une tension électrique appliquée sur deux faces métallisées, entre en résonance lorsque la période des vibrations mécaniques est égale à celles des oscillations électriques (effet piézo-électrique). L'entretien des oscillations est assuré en plaçant le quartz dans un montage oscillant à réaction. La fréquence du mouvement oscillant est déterminée presque uniquement par la fréquence propre du quartz. La qualité spectrale du signal délivré par l'oscillateur à quartz tient à la valeur élevée au coefficient de qualité du cristal, celui-ci atteint et dépasse même parfois 10^6.

La fréquence propre des vibrations dépend de la coupe et des dimensions du cristal et par conséquent, dans une certaine mesure, de la température. Il est possible d'obtenir, pour une coupe donnée, un point d'inversion de la courbe fréquence–température. On obtient une stabilité remarquable de la fréquence d'oscillation en thermostatant le quartz au voisinage du point d'inversion. Un oscillateur soigné permet d'assurer une stabilité de fréquence à quelque 10^{-10} près. Malheureusement, le quartz est sujet à un phénomène de « vieillissement » qui se traduit par une dérive lente de fréquence. Ceci interdit l'emploi d'une horloge à quartz, si perfectionnée soit-elle, comme étalon primaire de fréquence. Néanmoins, cette dérive est très faible et, en général très régulière, elle n'introduit pas de difficultés majeures dans l'emploi comme étalon secondaire d'oscillateurs à quartz. A titre d'exemple, nous donnons (fig. 20) la fréquence de l'horloge à quartz James Knight à 1 MHz de l'Observatoire de Besançon mesurée par rapport à un des Masers du Laboratoire de l'Horloge Atomique. La dérive atteint $1{,}2.10^{-10}$ par jour et ne varie que de quelque 10^{-11} sur des périodes d'une dizaine de jours.

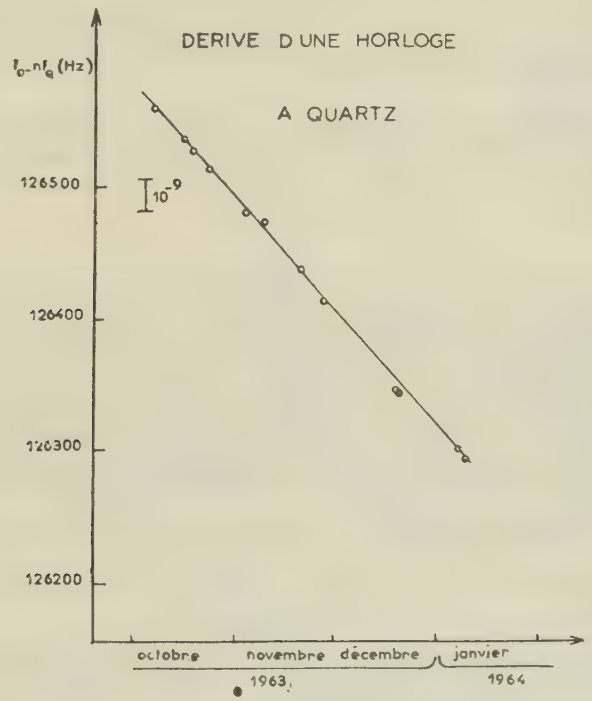


Fig. 20

La qualité essentielle d'un oscillateur à quartz utilisé pour des mesures métrologiques est sa stabilité à long terme, c'est-à-dire la stabilité relative de la fréquence de l'oscillateur sur des périodes qui sont supérieures à quelques heures. Les comparaisons entre les oscillateurs à quartz métrologiques s'effectuent par mesure « d'états », et les fluctuations de phase qui affectent la fréquence instantanée n'introduisent pas d'erreurs appréciables lorsque le temps de corrélation de phase est très faible. La comparaison avec un étalon de fréquence moléculaire s'effectue par une méthode de battement, le temps de mesure est en général de l'ordre de la seconde, ce sont les fluctuations de phase à court terme qui déterminent la précision ultime de la mesure. L'étude de l'influence du bruit sur la fréquence d'un auto-oscillateur permet de déterminer les conditions qui assurent la meilleure stabilité à court et long termes, ces conditions ne sont pas toujours compatibles.

Influence du bruit sur la fréquence d'oscillation. — L'effet du bruit sur le système oscillant se traduit par de petites fluctuations du régime permanent d'oscillation du quartz par rapport au niveau stabilisé. On montre aisément que pour un circuit classique où le quartz est placé dans le circuit de grille de la lampe d'entretien, les fluctuations du courant de la lampe dues au bruit de grenaille peuvent être négligées vis-à-vis du bruit thermique du circuit d'entrée. Le bruit étant supposé faible vis-à-vis du niveau d'oscillation, sa décomposition sous forme de Rice introduit une composante en phase et une composante en quadrature avec le signal. On peut en déduire en se limitant au premier ordre, les lois d'évolution de l'amplitude et de la phase de l'oscillation sous l'influence du bruit.

En régime permanent, le système oscillant présente une mémoire de phase infinie. Le carré moyen $\overline{\Delta\Phi_t^2}$ des fluctuations de phase dues au bruit thermique du circuit d'entrée croît proportionnellement au temps. On trouve aisément, en faisant intervenir l'amplitude stabilisée A_o (25) :

$$\overline{\Delta\Phi_t^2} = \frac{1}{A_o^2} KTr\,\omega^2 t$$

ω = pulsation de l'oscillation

Ces fluctuations de fréquence introduites par $\overline{\Delta\Phi^2}_t$ entraînent sur une mesure de durée t^*, une erreur relative $\Delta f/f$:

$$\Delta f/f = \frac{1}{A_o}\left(\frac{KTr}{t^*}\right)^{1/2}$$

Ces fluctuations sont d'autant plus grandes que l'amplitude stabilisée est plus faible, mais pour des durées t^* assez longues, elles deviennent négligeables même à faible niveau d'oscillation. Par ailleurs, on augmente la stabilité à long terme de l'oscillateur en opérant avec une amplitude d'oscillation réduite (10^{-2} V), car on diminue ainsi la dépendance de la fréquence du quartz vis-à-vis de certains paramètres macroscopiques (tension d'alimentation du circuit d'entretien, variations de la température interne du quartz par suite de l'oscillation). Dans ces conditions, les fluctuations relatives de fréquence $\Delta f/f$ relevées sur des périodes de l'ordre de la seconde peuvent atteindre plusieurs 10^{-11}. Pour assurer une meilleure stabilité à court terme du quartz, il est donc nécessaire d'opérer à fort niveau d'oscillation.

L'influence du bruit d'amplitude sur la fréquence d'oscillation dépend du type d'oscillateur utilisé. Le calcul tenant compte de l'influence de l'amplitude sur la fréquence et du bruit d'amplitude a été conduit par Blaquière (25)pour quelques types d'oscillateurs, notamment l'oscillateur de Pierce. L'application pratique conduit à des valeurs de $\Delta f/f$ pouvant atteindre plusieurs 10^{-11}. C'est l'ordre de grandeur des fluctuations lentes de fréquence du battement entre l'harmonique d'un quartz à 1 MHz et un Maser, mesurées avec une constante de temps de 1 s. Ces fluctuations peuvent donc s'expliquer par l'influence du bruit dans les circuits de l'oscillateur.

Spectres d'oscillateurs à quartz. — La détermination de la répartition spectrale de puissance d'un oscillateur peut se faire également suivant une méthode qui utilise la décomposition de Rice du bruit. Nous en rappelons brièvement les principaux résultats : le spectre comporte une raie centrale dont la largeur de raie Δf est déterminée par les fluctuations de phase $\Delta\Phi_t$:

$$\Delta f = \frac{\pi^2 r\, KTf^2}{A_o^2}$$

Les fluctuations de l'amplitude qui sont dues aux composantes de bruit en phase avec le signal théorique donnent naissance à un spectre continu réparti sur une plage de fréquence Δf_b. Sa largeur dépend du facteur d'amortissement τ caractérisant le retour au régime permanent d'oscillation A_o. Ce facteur est lié aux caractéristiques d'entretien du circuit et, par conséquent, à l'amplitude d'oscillation. Il agit en sens inverse sur la largeur du spectre de bruit et sur la puissance répartie sur ce spectre. En utilisant un quartz oscillant à fort niveau, on diminue la puissance de bruit tout en augmentant la bande de fréquence sur laquelle ce bruit est réparti. D'autre part, la raie centrale est d'autant plus étroite que l'amplitude d'oscillation est plus élevée. Ce sont donc là des conditions qui contribuent à assurer une excellente pureté spectrale au signal obtenu par multiplication de fréquence dans la gamme des hyperfréquences. Nous montrerons qu'il est possible de concilier ces conditions avec celles qui conduisent à une bonne stabilité à long terme en asservissant en phase cet oscillateur à raie centrale très étroite où, comme on l'a dit, très monochromatique, sur un oscillateur moins monochromatique mais très stable à long terme.

Appliquons les résultats précédents à l'oscillateur à quartz à 5 MHz que nous utilisons pour l'analyse spectrale. On a les valeurs suivantes :

$$f = 5.10^5 \text{ Hz} \qquad r = 6\ \Omega \qquad C/C_o = 5.10^2 \qquad A_o = 1\ v$$

On obtient : $\Delta f/f \simeq 3{,}2.10^{-16}$

Si l'on tient compte de la multiplication jusqu'à la fréquence du Maser, on obtient une largeur relative proche de 2.10^{-12}. Remarquons qu'il s'agit là d'une valeur obtenue à partir d'un schéma simplifié qui ne tient pas compte de l'influence des fluctuations d'amplitude sur la fréquence de l'oscillateur.

II. — Etude expérimentale des spectres d'oscillateurs à quartz.

Avant de présenter les résultats expérimentaux concernant les spectres d'oscillateurs à quartz, nous croyons utile d'insister sur certains aspects de la présentation de ces spectres. Précisons tout d'abord que, pour simplifier, nous appelons souvent spectre d'oscillateur à quartz ce qui, en réalité, correspond au spectre de l'harmonique de ce quartz, obtenu par une des méthodes déjà décrites. Nous avons analysé la différence existant entre le spectre de l'harmonique d'un signal et le signal lui-même. Il est essentiel de ne pas perdre de vue cet aspect de la question lors de l'examen des spectres. L'enregistrement de ces derniers, utilisant une détection linéaire, délivre, non pas le spectre de puissance $P(f)$, mais $[P(f)]^{1/2}$. L'échelle des ordonnées a été graduée en décibels en prenant pour base de comparaison l'amplitude de la raie centrale (0 dB). L'ana-

lyseur de spectre permet l'utilisation de plusieurs gammes de sensibilité : la première échelle ne permet guère que l'étude de la raie centrale des spectres, car, pour la plupart de ceux-ci, les diverses raies latérales de modulation sont très faibles et correspondent dans cette gamme de sensibilité, à la partie quadratique du détecteur. Le spectre de bruit exige un analyseur très sensible pour être mis aisément en évidence. C'est pourquoi nous utiliserons le plus souvent la deuxième gamme de sensibilité, la zone de linéarité s'étendant entre — 30 et — 75 dB en dessous de la raie centrale.

Nous avons décrit deux systèmes possibles d'étude des spectres et nous les avons employés successivement. L'un d'eux utilise l'accrochage en phase d'un Klystron sur l'harmonique d'un quartz, l'autre élimine le Klystron par une méthode de battement. Il était intéressant de comparer les résultats obtenus dans chaque cas. Nous avons relevé le spectre d'un quartz à 5 MHz en utilisant successivement les deux méthodes. L'accrochage en phase du Klystron X13 permet d'obtenir en fait le spectre de ce Klystron lorsqu'il est asservi sur l'harmonique du quartz. L'étude théorique nous a montré que l'accrochage en phase devait transmettre au Klystron asservi la pureté spectrale du signal de référence. Dans ces conditions, il est possible de considérer l'enregistrement obtenu (fig. 21) comme représentant en fait le spectre de l'harmonique du quartz. Celui-ci est obtenu par la seconde méthode, toutes les autres conditions expérimentales demeurant identiques (fig. 22). Dans la première gamme de sensibilité, les spectres obtenus sont pratiquement identiques. Nous avons utilisé ici la deuxième gamme de sensibilité et relevé principalement le spectre du pied de la raie centrale ; ceci permet de mettre en évidence une légère différence existant entre les deux enregistrements. La raie centrale du Klystron asservi en phase présente un léger élargissement par rapport au spectre de l'harmonique du quartz. A — 35 dB, la largeur de raie atteint respectivement 11 et 7,5 Hz, ces valeurs correspondent à une moyenne obtenue sur plusieurs enregistrements. La largeur du filtre analyseur, pour la même atténuation, est voisine de 5 Hz. On peut attribuer cet élargissement aux fluctuations résiduelles de phase du Klystron asservi. Une amélioration pourrait être obtenue assez aisément en augmentant le gain de la boucle d'asservissement. Aussi ce n'est pas essentiellement cet aspect de la question, mais bien plutôt des commodités de fonctionnement qui nous ont conduit à utiliser exclusivement la seconde méthode.

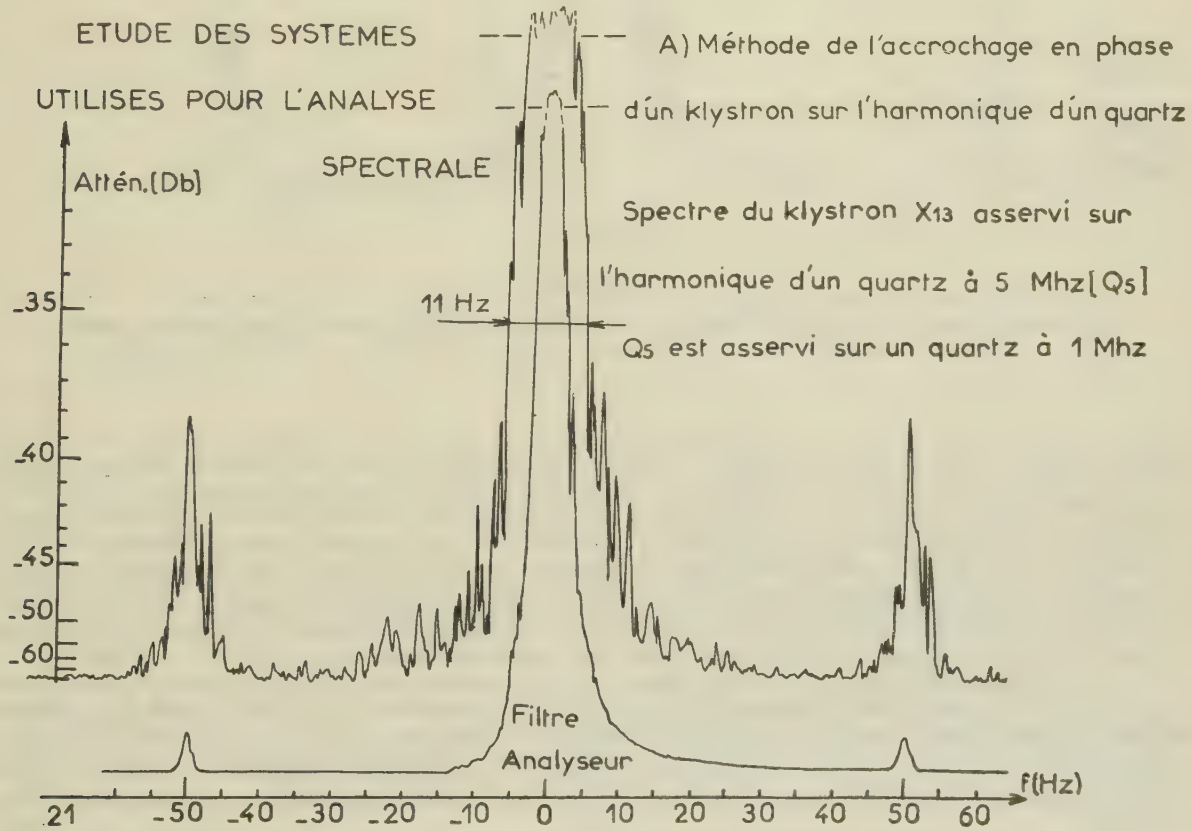


Fig. 21

Les difficultés que nous avions rencontrées lors des essais d'asservissement du Klystron X13 sur l'harmonique d'un quartz à 100 kHz, difficultés que nous pouvions attribuer à l'impureté spectrale de l'harmonique du quartz, nous ont conduit à réaliser un oscillateur à quartz à 5 MHz particulièrement monochromatique. Nous avons utilisé un quartz de Q élevé (3.10^5) en montage de Pierce, et nous avons réalisé un fort niveau d'oscillation. La puissance dissipée dans le quartz est proche de 0,3 mW (fig. I et II). C'est le spectre de l'harmonique de ce quartz que nous étudierons tout d'abord. Le facteur de multiplication est alors égal à 4 774. Les raies latérales de modulation sont donc amplifiées par ce facteur, ce qui correspond à 73,5 dB par rapport à la porteuse centrale. La figure 23 présente le spectre du quartz au voisinage de la raie centrale. La largeur de cette dernière ne dépasse pas 0,9 Hz à 3 dB. On atteint la limite de résolution imposée par la largeur de raie du filtre

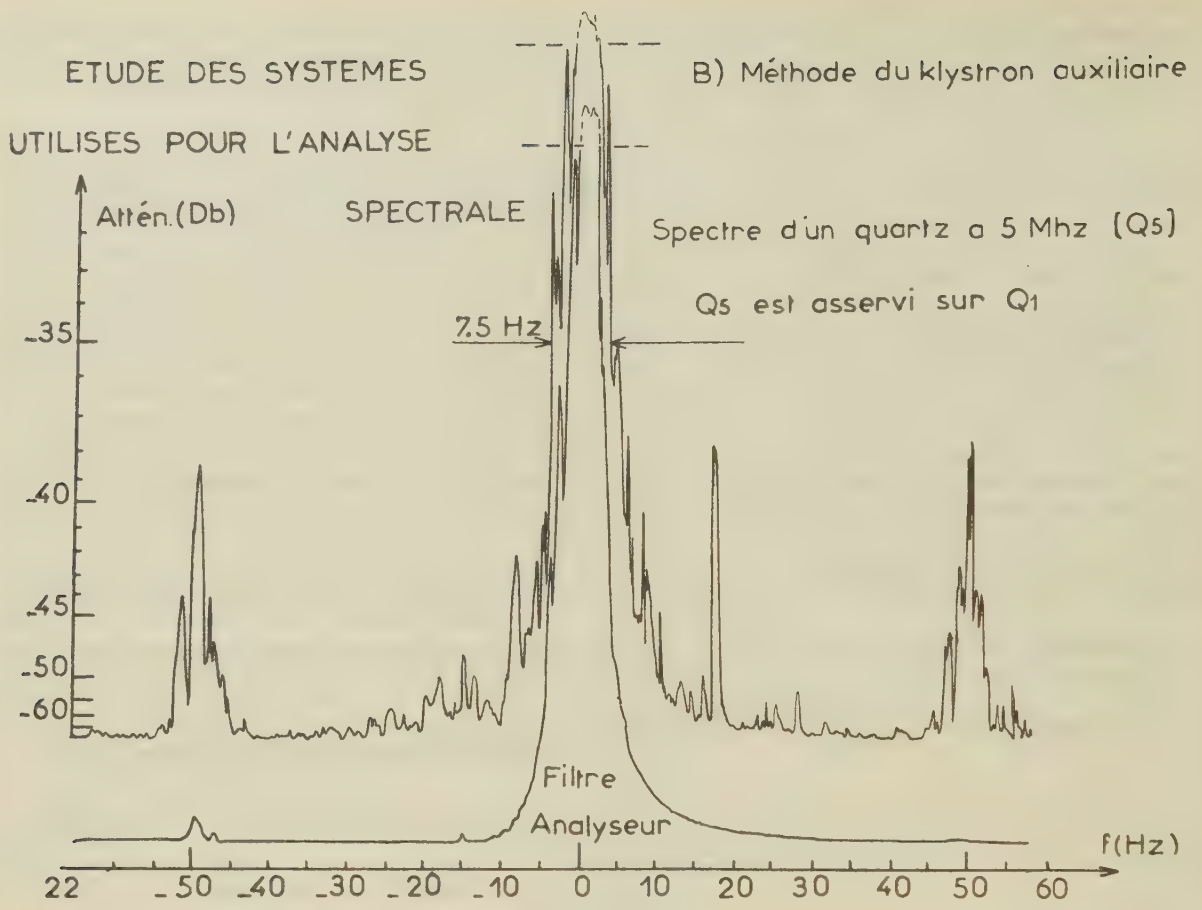


Fig. 22

analyseur. Entre 0 et — 20 dB, la raie centrale ne diffère pas de la courbe dynamique du filtre à quartz (fig. 19). L'étude détaillée du pied de la raie nous permet de retrouver le résultat de la figure 22 : largeur de raie proche de 7,5 Hz à — 3,5 dB.

Le spectre suivant (fig. 24), obtenu dans les mêmes conditions, met en évidence des raies de modulation, les fréquences modulantes étant égales à 50 et 100 Hz, et l'amplitude des raies comprises entre — 35 et — 40 dB. L'utilisation de la sensibilité maximum de l'analyseur fait également apparaître un spectre de bruit dont l'amplitude, au voisinage de la raie centrale, ne dépasse pas — 60 dB par rapport à cette dernière. L'exploration spectrale d'une large plage de fréquence montre la décroissance du spectre de bruit incohérent qui devient négligeable au-delà de 500 Hz de part et d'autre de la raie centrale (fig. 25). Il en est d'ailleurs de même pour les diverses raies cohérentes correspondant aux harmoniques des signaux modulant à 50 Hz ou 100 Hz. Nous avons poursuivi l'analyse spectrale jusqu'à plus de 1 kHz de la raie centrale (fig. 26) sans rencontrer de signaux détectables, c'est-à-dire de signaux dont l'amplitude relative soit supérieure à — 80 dB.

La monochromaticité d'un oscillateur est caractérisée par deux éléments essentiels : largeur de la raie centrale, puissance répartie sur le spectre de bruit incohérent et largeur de celui-ci. Eventuellement, on doit tenir compte de la présence de raies dues à des signaux parasites non aléatoires : celles dues à l'alimentation du secteur alternatif sont pratiquement inévitables. Sur les deux premiers points, l'oscillateur à 5 MHz que nous avons expérimenté présente une excellente monochromaticité : raie centrale inférieure à 1 Hz, largeur du spectre de bruit décelable ne dépassant pas 1 kHz. Le rapport signal/bruit, définissant le rapport de la puissance totale du bruit à la puissance transportée par la raie centrale, est proche de — 38 dB.

Nous étudierons les raies de modulation plus en détail dans un prochain paragraphe et nous montrerons que l'on peut, dans les meilleures conditions, les rejeter au minimum à — 40 dB.

Nous donnons, à titre de comparaison, le spectre de l'harmonique d'un quartz à 5 MHz ayant également une bonne pureté spectrale, jointe à une bonne stabilité à long terme. Ce quartz équipe le standard de fréquence H.P. modèle 107 B.R. La largeur de raie est également inférieure à 1 Hz (fig. 27). Par contre, le spectre de bruit continu qui accompagne la raie centrale est assez important : dans la bande de fréquence présentée sur l'enregistrement, l'amplitude moyenne du bruit est comprise entre — 40 et — 50 dB. Le rapport signal/bruit ne dépasse pas — 17 dB.

Parmi les enregistrements que nous venons de présenter, certains figurent le spectre de l'harmonique du quartz à 5 MHz (Q5), mais celui-ci est asservi en phase sur l'harmonique 5 d'un quartz à 1 MHz (Q1). Ce dernier est un oscillateur J.K. SULZER, modèle FS 1100 T, qui est caractérisé par une excellente stabilité à long terme, quelque 10^{-10} en valeur relative sur 24 heures. Il est utilisé pour les mesures métrologiques permettant d'étudier la stabilité à long terme des Masers à NH_3.

Spectre d'un quartz à 5 Mhz [Q 5]

a) Spectre normal b) Spectre amplifié

Raie centrale

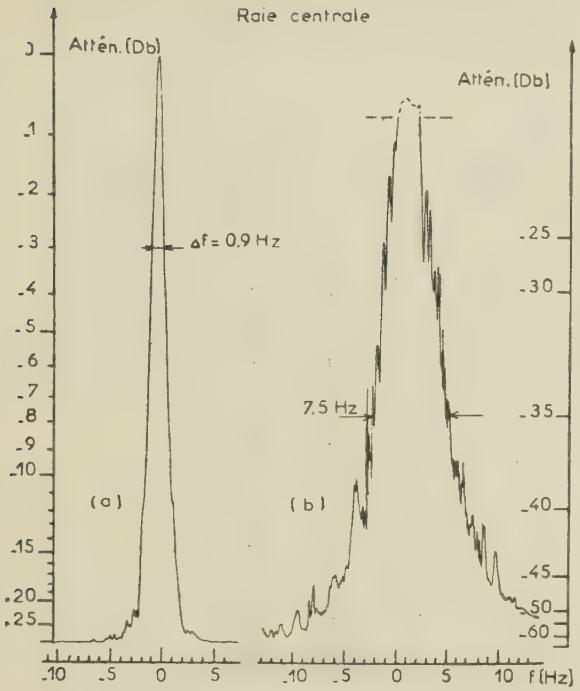


Fig. 23

SPECTRE D'UN QUARTZ A 5 MHZ (Q 5)

Q 5 est asservi sur un quartz à 1 Mhz [Q 1]

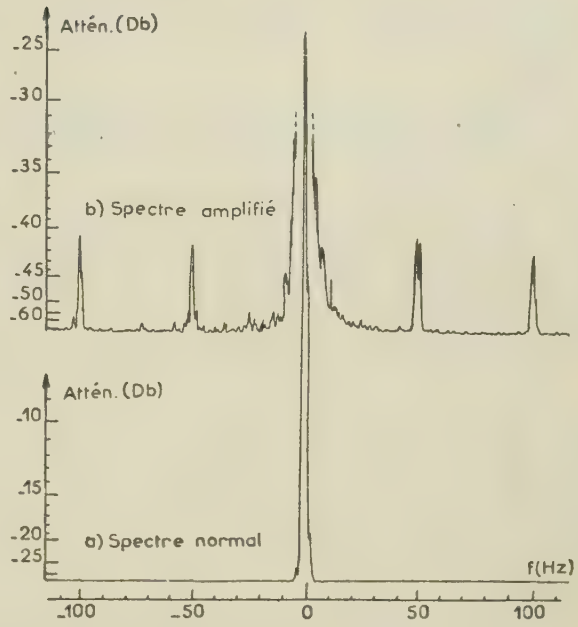


Fig. 24

Spectre d'un quartz à 5 Mhz [Q 5]

Q5 est asservi sur un quartz à 1 Mhz [Q1]

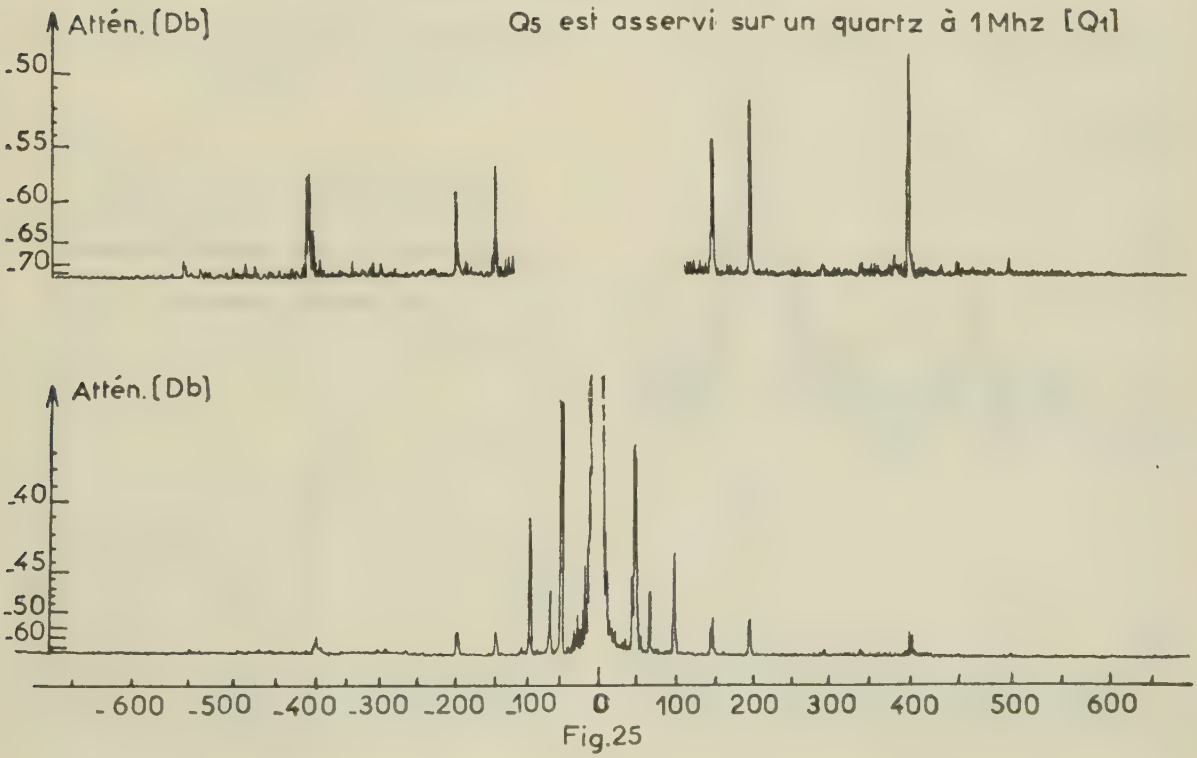


Fig.25

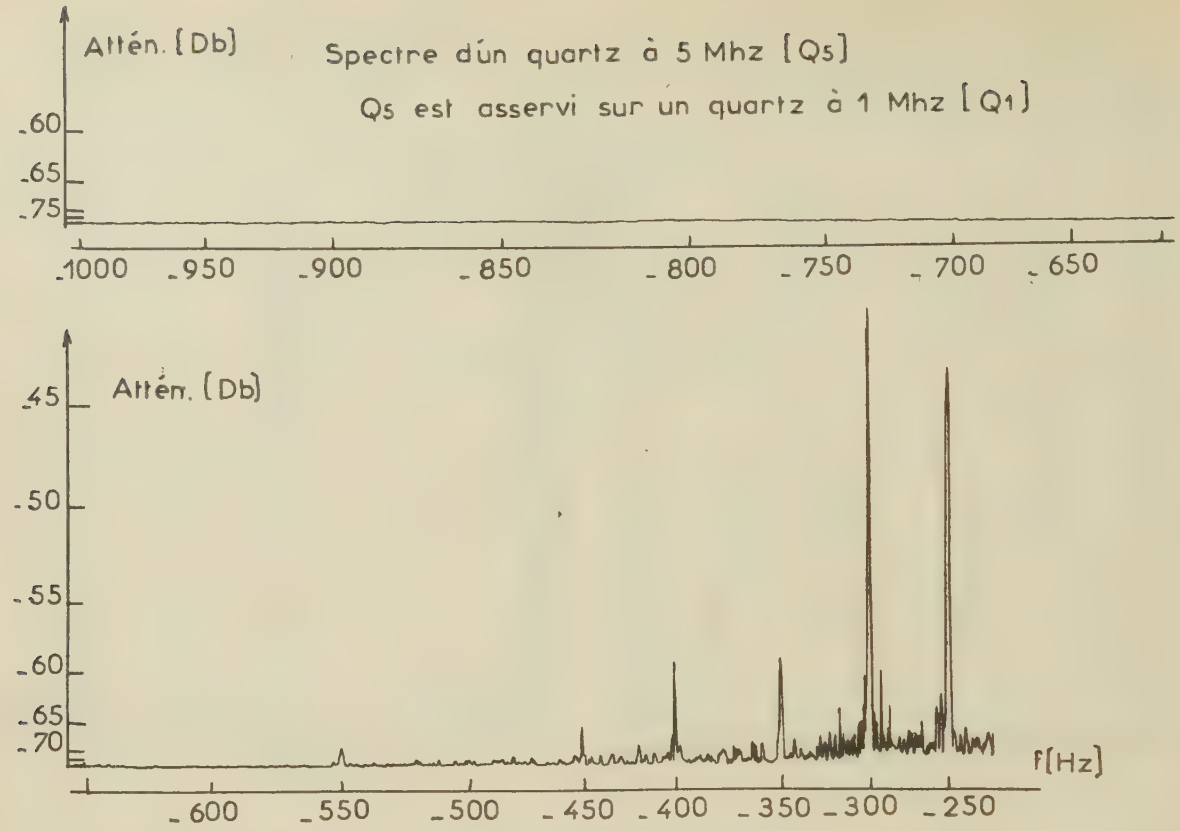


Fig. 26

Spectre d'un quartz à 5 Mhz [Q 5 a]
a) Spectre normal b) Spectre amplifié

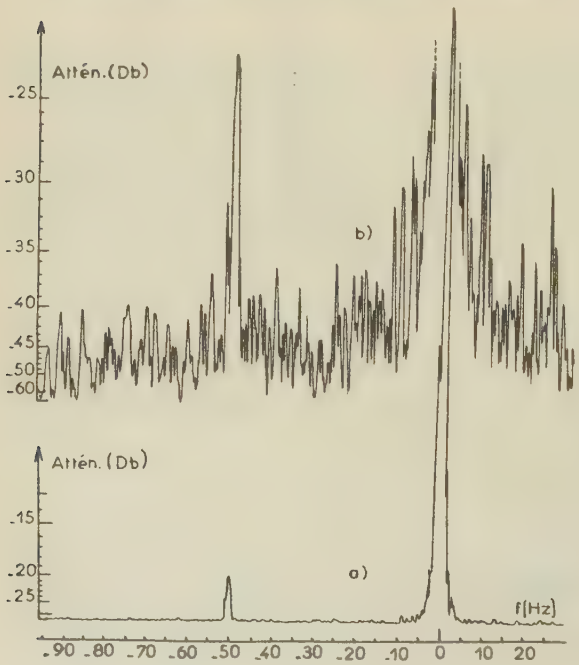


Fig. 27

Spectre d'un quartz à 5 Mhz [Q 5]
Raies de modulation à 50 et 100 Hz
a) Chauffage continu des lampes amplificatrices de l'oscillateur
b) Chauffage alternatif

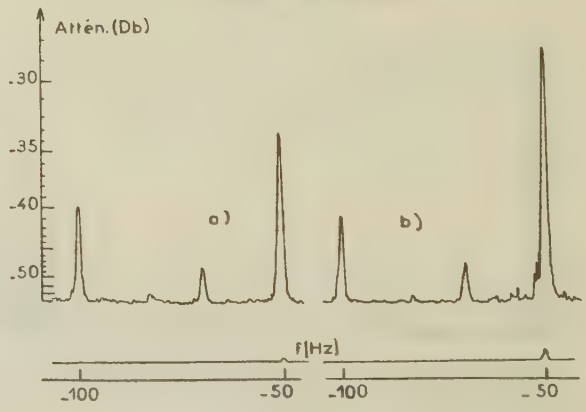


Fig. 28

Nous avons étudié l'asservissement de façon à bénéficier de la stabilité à long terme de ce quartz tout en conservant la pureté spectrale du quartz à 5 MHz. En effet, le signal délivré par le quartz à 1 MHz, transposé directement par multiplication dans le domaine des hyperfréquences, est pratiquement inutilisable : le battement avec le Klystron X13 fournit un signal à 5,5 MHz dont le rapport signal/bruit n'excède pas 1,5 à 2. Il ne peut être employé, aussi bien pour l'asservissement en fréquence que pour l'asservissement en phase du Klystron. Un oscillateur à 2,5 MHz du même type donne lieu au même phénomène. Dans les deux cas, on obtient une forte modulation due au signal à 100 kHz du démultiplicateur 1 MHz – 100 kHz ou 2,5 MHz – 100 kHz faisant partie du standard de fréquence qui utilise l'oscillateur à quartz. Il n'est pas possible dans ces conditions d'utiliser l'analyseur de spectre à Maser pour effectuer une analyse spectrale. C'est pourquoi nous avons été conduit à réaliser l'asservissement dont l'étude détaillée fera l'objet d'un prochain paragraphe.

Etude des raies latérales. — Il est très délicat de déceler l'élément de l'ensemble du dispositif où s'effectue une modulation à la fréquence du secteur alternatif (50 Hz) et aux fréquences harmoniques. Le quartz oscillateur ainsi que les premiers étages multiplicateurs constituent les points les plus sensibles, car les raies que l'on observe correspondent à un indice de modulation d'autant plus faible que la fréquence est moins élevée. Les résultats théoriques et expérimentaux de l'étude de l'asservissement montreront que la modulation de phase à 50 Hz qui peut affecter le signal utilisé pour l'asservissement à 5 MHz subit une atténuation proche de 60 dB. Elle devient généralement négligeable. On constate effectivement l'invariance de l'amplitude des raies latérales, que l'on utilise le quartz à 5 MHz (Q5) ou que celui-ci soit asservi sur le signal délivré par un autre quartz (fig. 32 et 33). Nous pouvons donc ne considérer que l'ensemble du dispositif de multiplication de fréquence à partir de l'oscillateur à quartz à 5 MHz. Ce dernier comprend l'oscillateur proprement dit et son préamplificateur, suivis d'étages amplificateurs et séparateurs. L'ensemble est alimenté par une même haute tension. Le chauffage des lampes du préamplificateur et de l'oscillateur est assuré par une alimentation 6,3 V redressée et filtrée ; celui de l'amplificateur peut utiliser, soit une alimentation alternative, soit une batterie. La deuxième solution est préférable, son emploi se traduit par un gain de 4 dB sur l'amplitude des raies latérales à 50 Hz (fig. 28).

Nous avons étudié l'influence d'une modulation de l'alimentation H.T. de l'oscillateur à quartz en suivant l'évolution d'une raie du spectre du quartz provoquée par un signal d'amplitude variable superposé à la tension d'alimentation. La fréquence modulante est égale à 65 Hz, ce qui permet de séparer cette raie de celles déjà présentes à 50 ou 100 Hz. On représente, sur la figure 29, le résultat des mesures. Il suffit d'une composante à 50 Hz d'amplitude égale à 2 mV pour donner naissance à une raie à 40 dB en dessous de la raie centrale. L'alimentation de l'oscillateur à quartz doit être particulièrement soignée. La même expérience a été poursuivie avec l'alimentation de la chaîne de multiplication 5–225 MHz et le résultat reproduit également la figure 29. La sensibilité de la chaîne de multiplication au ronflement de la haute tension est faible : à égalité de modulation, l'alimentation H.T. du multiplicateur de fréquence produit des raies qui sont à — 17 dB de celles produites par l'alimentation de l'oscillateur à quartz. La modulation de phase à 50 Hz qui affecte le signal de sortie des chaînes de multiplication 5–225 MHz ne peut donc être attribuée à un ronflement de l'alimentation haute tension. Le chauffage en continu des chaînes de multiplication n'apporte guère d'amélioration. Par contre, il est indispensable de séparer les chaînes de multiplication et leurs alimentations, car les premières, ainsi que nous l'avons fait remarquer, sont très microphoniques et les vibrations des transformateurs d'alimentation suffisent pour produire une modulation importante. En se plaçant dans les meilleures conditions expérimentales, l'amplitude des raies latérales dues à des signaux non aléatoires se trouve rejetée au minimum à 45 dB en dessous de la raie centrale (fig. 30).

Etude d'une raie du spectre de l'harmonique d'un quartz à 5 Mhz due à une modulation de l'alimentation H. T. de l'oscillateur à quartz [1] du multiplicateur de fréquence [2]

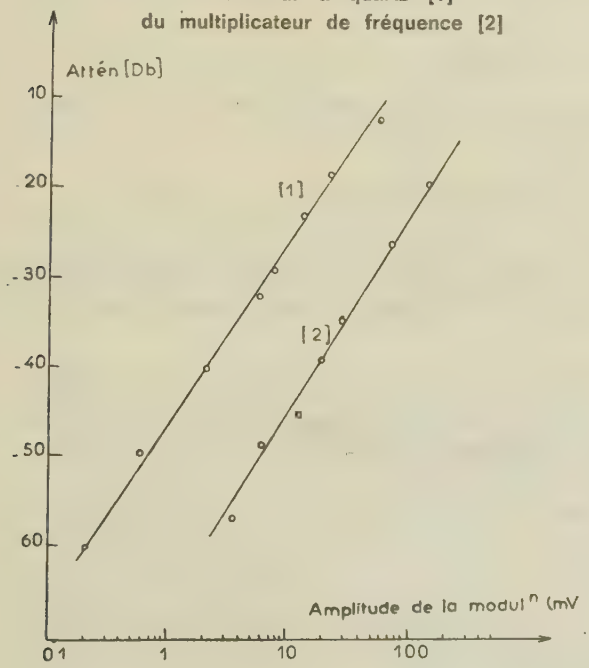


Fig. 29

Spectre d'un quartz à 5 Mhz [Q 5]

Le quartz Q 5 est asservi sur un quartz à 1 Mhz [Q 1]

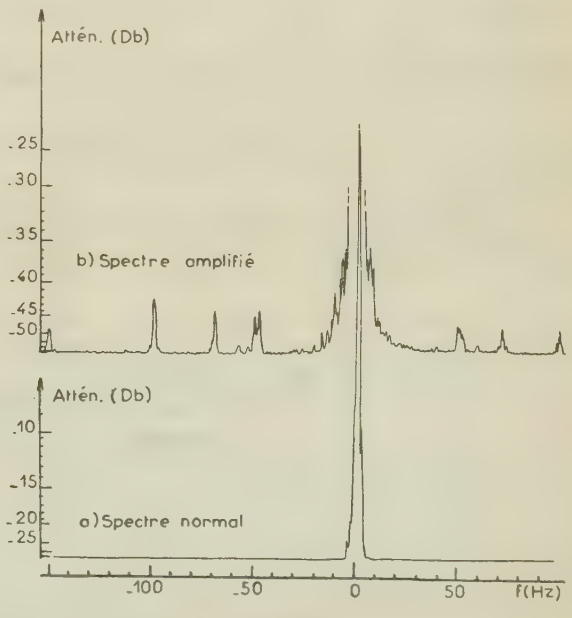


Fig. 30

Sur certains spectres apparaissent parfois des raies latérales correspondant à des fréquences de modulation généralement comprises entre 10 et 100 Hz (raies à 70 Hz sur les fig. 28 et 30). L'amplitude relative de ces raies peut atteindre — 45 dB. Elles sont dues à des vibrations mécaniques qui, par microphonie, agissent sur la chaîne de multiplication 5–225 MHz. La plupart des vibrations mécaniques sont provoquées par le fonctionnement des pompes à vide primaire des Masers. On atténue ces raies en plaçant la chaîne de multiplication sur un support antivibratoire (fig. 24).

En définitive, avec les précautions que nous venons de suggérer, l'amplitude des raies latérales due à des signaux cohérents peut être rejetée à un niveau qui ne dépasse guère le niveau de bruit maximum.

III. — Etude de l'asservissement d'un oscillateur à quartz

Nous asservirons en phase un oscillateur sur le signal de sortie d'une chaîne de multiplication attaquée par un quartz dont la stabilité à long terme est excellente.

L'oscillateur à asservir doit être caractérisé par une grande pureté spectrale, nous prenons donc un quartz oscillant à fort niveau. L'asservissement en phase doit transférer à cet oscillateur la stabilité à long terme du signal de référence V_r sortant de la chaîne de multiplication. Ce dernier est modulé par le bruit et présente des raies de modulation à fréquence élevée que nous cherchons à éliminer. Nous pouvons le représenter sous la forme suivante :

$$V_r(t) = v_r \sin \left[\omega_o t + \int \omega_r(t)\, dt\right]$$

$$\text{avec} \qquad \omega_r(t) = \sum_p a_p \cos (\omega_p t - \varphi_p)$$

L'oscillateur est stable à long terme. Par suite : $a_p/\omega_p \ll 1$. On peut donc négliger l'intermodulation et décrire le spectre de puissance par $P(f)$:

$$P(f)\, df = \frac{v_r^2}{2} \frac{W_p(f)\, df}{\omega_p^2}$$

$W_p(f)$ représente la densité spectrale de la modulation de fréquence de $V_r(t)$.

Les fluctuations de fréquence à long terme de l'oscilloteur à asservir se traduisent par des termes de modulation de très basse fréquence. Nous les séparerons des termes de modulation dus au bruit dans le spectre de puissance et nous représenterons le signal de sortie du quartz à asservir par $V_o(t)$:

$$V_o(t) = v_o \sin \left[\omega_o t + \int \omega(t)\, dt\right]$$

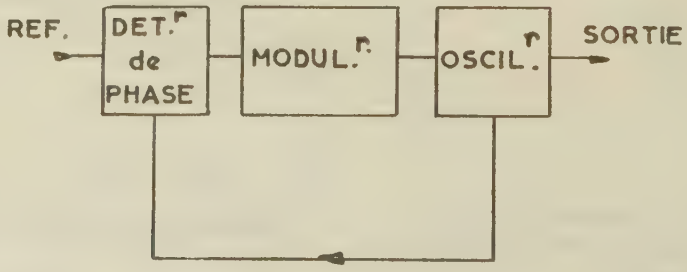
$$\omega(t) = \sum_n a_n \cos (\omega_n t - \varphi_n) + \sum_m a_m \cos (\omega_m t - \varphi_m)$$

On pose : $\qquad \delta_n = a_n/\omega_n \ll 1 \qquad \delta_m = a_m/\omega_m$

δ_m représente la modulation à très basse fréquence. Les termes en δ_m peuvent être supérieurs à 1. On ne peut donc négliger l'intermodulation et l'on obtient, en calculant la puissance moyenne P_T de $V_o(t)$ sur une durée T :

$$P_T = \frac{v_o^2}{2} \prod_m \left[J_o^2(\delta_m) + 2 \sum_i J_i^2(\delta_m)\right] \left[1 + \frac{1}{2} \sum_n \delta_n^2\right]$$

Le comportement du dispositif d'asservissement dont nous représentons ci-après le schéma est lié à l'action intégratrice du phasemètre. Le gain de la boucle en fonction de la fréquence a une pente de — 6 dB par octave. Le système agit donc comme un filtre passe-bas vis-à-vis des composantes de bruit extérieures, et réduit ainsi les composantes de fréquence élevée



Schèma de l'asservissement en phase

du bruit de la référence. Inversement, les termes de modulation de l'oscillateur asservi de fréquence inférieure à une fréquence de coupure f_c sont atténués. f_c est relié au gain statique du servo-mécanisme G :

$$f_c = G/2 \qquad G = K_p K_v$$

K_p gain du phasemètre en volt/rad $\qquad$ K_v gain du modulateur en rad/s/volt

Le système d'accrochage en phase sous sa forme la plus simple constitue donc un dispositif particulièrement bien adapté au but que nous poursuivons, puisqu'il permet d'éliminer la modulation haute fréquence de la référence tout en transmettant à l'oscillateur asservi la stabilité à long terme de cette dernière. Le choix de la fréquence de coupure est dicté, d'une part par la stabilité à long terme du quartz à asservir, c'est-à-dire par la valeur maximum de la pulsation $(\omega_m)_M$ des termes de modulation lente du quartz, et d'autre part par la valeur minimum $(\omega_p)_m$ de la modulation de la référence. Un compromis convenable doit être cherché entre ces deux impératifs contradictoires. L'utilisation d'un quartz convenablement thermostaté permet de réduire la bande passante de l'asservissement. L'action du servo-mécanisme peut être décrite à l'aide de sa fonction de transfert en boucle ouverte φ_s/φ. φ_s et φ_e mesurent les variations de la phase de la référence et de l'oscillateur, mesurées à partir d'un repère tournant à la vitesse ω_r. $\varphi = \varphi_e - \varphi_s$. En notation de Laplace, on obtient :

$$\varphi_s/\varphi = G/p \qquad \text{avec} \quad p = j\omega$$

En supposant la référence monochromatique, chaque terme du spectre de modulation du quartz est multiplié par $1 - G/p]^{-1}$.

En introduisant la densité spectrale de la modulation de fréquence correspondant aux deux séries de termes δ_n et δ_m, soit $W_m(f_m)$ et $W_n(f_n)$, on obtient le spectre du quartz asservi $P_s(f)$ sous la forme :

$$P_s(f)\,df = \frac{v_o^2}{2} \sum_m \left[j_o^2(\alpha') + 2 \sum_i j_i^2(\alpha') \right] \left[1 + \frac{W_n(f)\,df}{G^2 + 4\pi^2 f^2} \right]$$

avec $\alpha' = \dfrac{W_m(f_m)\,df}{G^2 + 4\pi^2 f^2}$ et $G > f_m$

G est suffisamment élevé pour que l'on puisse ne conserver que les termes du premier ordre en δ_m. On a, dans ce cas :

$$P_s(f)\,df = \frac{v_o^2}{2} \left[1 + \frac{W_m(f)\,df}{4\pi^2 f_m^2 + G^2} + \frac{W_n(f)\,df}{4\pi^2 f_n^2 + G^2} \right]$$

Le spectre haute fréquence de l'oscillateur est pratiquement inchangé (par rapport au cas où il n'est pas asservi), car $f_n > G$, par contre le spectre de basse fréquence est considérablement réduit.

L'action du servo-mécanisme sur le bruit qui affecte le signal de référence peut être obtenu en considérant chaque terme de modulation d'amplitude a_p comme une perturbation appliquée à l'entrée du servo-mécanisme. On en déduit l'amplitude $a'p$ de la perturbation transmise au quartz asservi : $a'_p = a_p \left[1 - \dfrac{1}{G/p} \right]^{-1}$

On améliore l'atténuation du bruit de la référence en ajoutant un filtre à la sortie du détecteur de phase. La fonction de transfert d'un filtre RC est égale à $[1 + \tau p]^{-1}$. La fonction de transfert en boucle ouverte du servo-mécanisme prend la forme suivante :

$$\varphi_s/\varphi = G/p\,(1 + \tau p) \qquad \text{avec} \quad \tau = RC$$

Le diagramme asymptotique représentatif de φ_s/φ présente une pente de — 6 dB par octave jusqu'au point $\omega_f = 1/\tau$ et une pente de — 12 dB au-delà. On obtient aisément dans ces conditions :

$$a'^2_p = a_p^2\,[1 + \frac{\omega^2}{G^2}(\tau^2\omega^2 + 2\tau G + 1)]^{-1}$$

La fréquence de coupure f_c et la plage d'accrochage dépendent de τ et G. Pour conserver à cette dernière une valeur convenable, nous choisissons τ voisin de 1/G. La plage d'accrochage demeure supérieure à G/2 (rad/s). Le spectre de bruit du quartz asservi qui a pour origine les termes de modulation de la référence se met sous la forme suivante, en prenant $\tau = 1/G$:

$$P_1(f) = \frac{v_r^2}{2} \frac{W_p(f)\,df}{\omega^2 \left[1 + \dfrac{\omega^2}{G^2} \right] \left[\dfrac{\omega^2}{G^2} + 3 \right]}$$

Lorsque $\omega/G > 10$, la densité spectrale du bruit de la référence est rejetée à plus de 50 dB. On peut considérer qu'en dehors d'une bande de fréquence pouvant être réduite à quelques cycles, le spectre $P_1(f)$ est négligeable devant le bruit propre du quartz. Les harmoniques de la fréquence du quartz de référence introduit par le processus de multiplication sont complètement éliminés. L'asservissement permet donc de profiter de la pureté spectrale due aux conditions d'oscillation du quartz asservi tout en conservant la stabilité à long terme du quartz de référence.

Réalisation pratique. — Nous utilisons un quartz oscillant à 5 MHz dans un montage Pierce (fig. 1). La température du quartz est stabilisée à $\pm$ 1/10 °C près, ce qui est suffisant pour assurer une stabilité relative supérieure à 10^{-7} sur une période de quelques heures. Les circuits de l'oscillateur ainsi que ceux d'un premier étage amplificateur sont montés à l'intérieur même de l'enceinte thermostatée. On utilise ensuite deux ensembles séparateurs identiques comprenant un étage d'amplification et un cathode-follower. L'une des sorties attaque la chaîne de multiplication, l'autre est utilisée pour l'asservissement. Le phasemètre comporte un montage classique à deux diodes. Il a un gain K_p égal à 3,4 volt/radian. Le signal de correction sortant du détecteur de phase est appliqué, à travers un filtre RC, à une diode Varicap placée en parallèle sur les capacités d'accord de la fréquence du quartz. Ce système de modulation est intéressant par sa simplicité. La pente K_v de la courbe représentant la fréquence du quartz en fonction de la tension de polarisation de la diode est égale à 0,5 Hz/volt au voisinage

du point de fonctionnement. Par suite, le gain en boucle ouverte du servo-mécanisme est proche de 11 rad/s. La plage d'accrochage dépasse 3 Hz et la fréquence de coupure avec un filtre passe-bas de constante de temps $\tau = 10^{-1}$ s est voisine de 1,4 Hz.

Nous avons étudié expérimentalement l'évolution du spectre de puissance du quartz asservi en modulant le signal de référence obtenu à 5 MHz par multiplication du signal du quartz à 1 MHz (Q1). Le signal de modulation, d'amplitude constante, est introduit dans le circuit d'asservissement avant le modulateur. Le spectre du quartz asservi relevé dans ces conditions fait apparaître des raies dont l'amplitude dépend de la fréquence du signal modulant. On en déduit l'indice de modulation δ_m correspondant à la fréquence f_m de modulation de la référence. On représente, sur la figure 31, l'affaiblissement relatif de l'indice de modulation en fonction de la fréquence. Au-delà de la fréquence de coupure du filtre, on obtient une droite dont la pente est égale à — 12 dB par octave. La présentation sur la même figure du diagramme asymptotique de l'asservissement met en lumière l'accord existant entre ces résultats et les calculs théoriques.

L'efficacité de l'asservissement peut être mise en évidence par l'analyse spectrale : nous présentons deux spectres pris dans les mêmes conditions expérimentales, si ce n'est que le premier (fig. 32) représente le spectre du quartz à 5 MHz (Q5) et que le second (fig. 33) montre le même spectre après asservissement du quartz, le signal de référence étant délivré par le quartz à 5 MHz (Q5a) dont nous avons déjà analysé le signal (fig. 27). Le spectre du quartz n'est pas modifié par l'asservissement, ceci entraîne la disparition des raies du spectre de bruit du signal de référence. La stabilité à long terme du quartz asservi est mise en évidence par des mesures métrologiques représentées par exemple sur la figure 20.

IV. — Spectre et fluctuations de fréquence.

Le signal hyperfréquence particulièrement monochromatique que nous avons obtenu en partant d'un quartz à 5 MHz nous permettait d'envisager une excellente stabilité de fréquence du battement entre ce signal et le Maser. L'étude expérimentale met en jeu un discriminateur attaqué après écrêtage par le signal à 129 kHz utilisé pour l'analyse spectrale. Nous donnons, sur la figure 34, le résultat des mesures. On présente successivement l'enregistrement des fluctuations de fréquence du quartz à 5 MHz (Q5) et, en second lieu, celles du même quartz asservi sur l'harmonique du quartz J. Knight à 1 MHz (Q1). La constante de temps de ces mesures de fréquence est égale à 1 seconde. La stabilité de fréquence du quartz (Q5) est excellente à très court terme, mais on met en évidence, même sur des périodes de quelques minutes, une dérive de fréquence assez importante qu'il faut attribuer, d'une part aux conditions de fonctionnement de ce quartz, d'autre part à la thermostatisation assez sommaire. La stabilité à moyen et long termes du quartz asservi devient excellente, et les fluctuations rapides de fréquence demeurent du même ordre de grandeur que précédemment, le carré moyen des fluctuations calculé sur des périodes de plusieurs minutes est voisin de $1{,}5.10^{-11}$. Ce chiffre est à rapprocher de celui qui mesure les fluctuations de fréquence du Maser. Pratiquement, on peut attribuer au seul quartz les variations que l'on observe. Sur l'un des meilleurs enregistrements

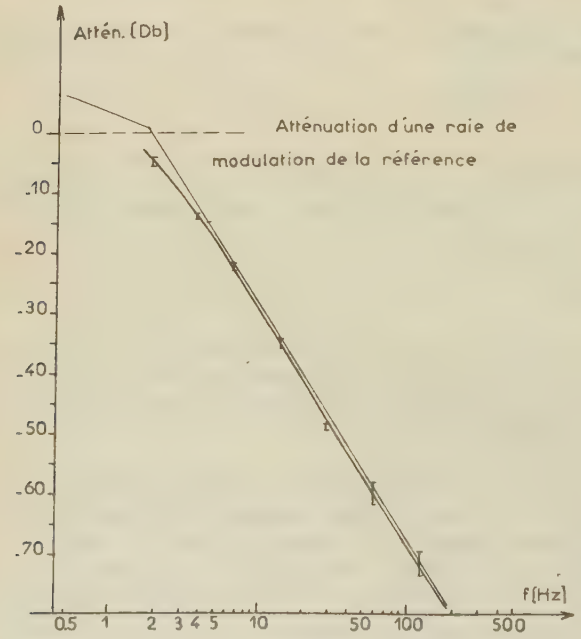


Fig. 31

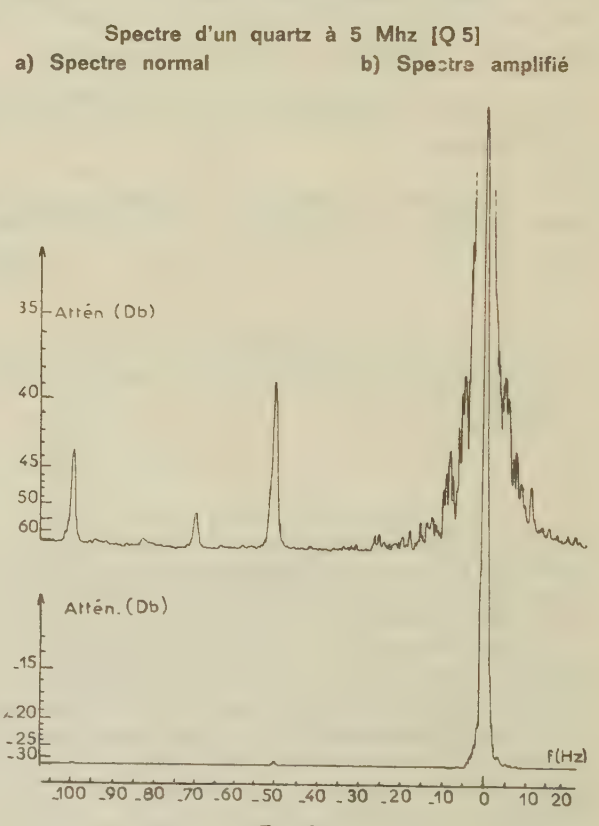


Fig. 32

que nous ayons obtenu (fig. 35), $\left| \frac{\overline{\Delta f^2}}{f} \right|^{1/2} \simeq 7{,}5.10^{-12}$. Ici encore, le bruit dû au quartz demeure quatre à cinq fois supérieur à celui qui a pour origine les fluctuations de phase des chaînes de multiplication ou celui du Maser. Nous avons étudié les fluctuations rapides de fréquence par une méthode oscillographique. La constante de temps de mesure est alors celle du discriminateur : elle peut être abaissée jusqu'à 100 μs. La figure 36 présente quelques oscillogrammes obtenus en utilisant le quartz à 5 MHz (Q5). On met en évidence une modulation de fréquence à 50 Hz et aux fréquences harmoniques du 50 Hz. L'amplitude de cette modulation peut se décrire par un indice de modulation proche de 3.10^{-2}. Cette valeur coïncide avec celle fournie par l'analyse spectrale, car elle se traduit par une raie située à — 36 dB en dessous de la raie centrale. La variance des fluctuations de fréquence aléatoire atteint 10^{-10} en valeur relative lorsque la constante de temps τ est égale à 100 μs. D'abord stationnaire, elle varie suivant une loi en $(\tau)^{-1/2}$ pour $\tau < 10$ ms.

La pureté spectrale du signal issu du quartz à 5 MHz (Q5) se traduit donc par une excellente stabilité de fréquence à très court terme. A titre de comparaison, nous avons relevé les fluctuations de fréquence du signal dont le spectre est présenté sur la figure 27. Il s'agit, rappelons-le, d'un quartz à 5 MHz qui, en hyperfréquence, apparaît très monochromatique, mais accompagné d'un spectre de bruit important. Les fluctuations de fréquence, avec $\tau = 1$ seconde, atteignent 6.10^{-11} (fig. 37b) alors que, si ce quartz n'est utilisé que comme référence pour stabiliser à long terme Q5, on obtient $1{,}5.10^{-11}$ (fig. 37c). Ce sont là, envisagés d'un autre point de vue, les résultats mêmes de l'analyse spectrale (fig. 27 et 33).

Une expérience intéressante peut être réalisée grâce au standard de fréquence qui utilise l'oscillateur à quartz à 5 MHz (Q5a). Ce standard délivre un signal à 100 kHz obtenu par démultiplication de l'oscillation à 5 MHz du quartz. L'analyse spectrale de ce signal à 100 kHz, après multiplication directe jusqu'en hyperfréquence, est impossible avec notre analyseur. Ceci s'explique aisément, ne serait-ce que par l'action de la multiplication 100 kHz – 5 MHz qui accroît par un facteur 50 l'amplitude du spectre de bruit observé sur la figure 27. Si l'on se sert du 50e harmonique de ce signal à 100 kHz pour asservir Q5, on constate que la modulation de phase, à 5 MHz, est telle qu'elle entraîne un élargissement important du spectre du quartz Q5 asservi (fig. 38). La largeur de la raie centrale devient égale à quelques hertz. Le calcul du second moment de ce spectre fournit une valeur proche de 8,7 Hz^2, ce qui correspond à des fluctuations de fréquence atteignant, en valeur relative, 9.10^{-11}. L'enregistrement direct des fluctuations de fréquence fournit une valeur du même ordre de grandeur.

On voit donc qu'il est ainsi possible de transférer jusqu'à la bande K des hyperfréquences la stabilité à long terme d'un signal à 100 kHz, même peu monochromatique, par la simple utilisation d'un asservissement en phase. La monochromaticité du signal obtenu reste largement acceptable pour de nombreuses applications. En dehors des applications métrologiques, nous signalerons l'intérêt que peut présenter, dans le domaine de la résonance magnétique électronique l'asservissement en phase d'un Klystron sur l'harmonique d'un quartz : intérêt lié d'une part à la puissance du signal obtenu, d'autre part à sa stabilité et sa pureté spectrale.

Spectre d'un quartz à 5 Mhz [Q 5]
Q 5 est asservi par un quartz à 5 Mhz [Q 5 a]

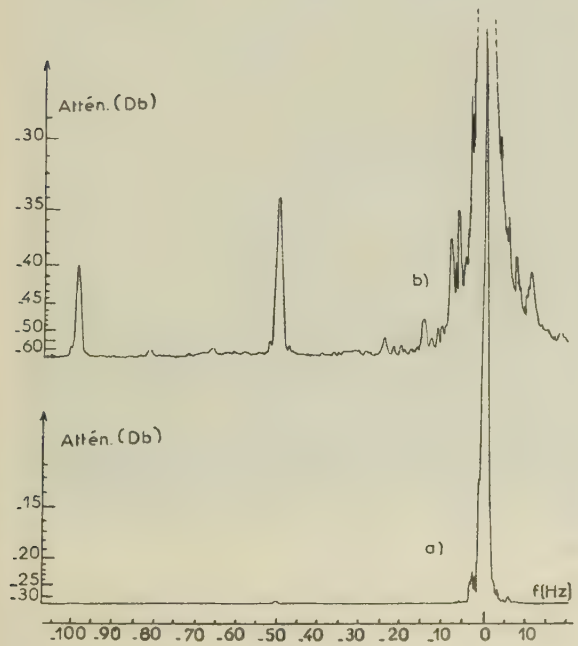


Fig. 33

BATTEMENT MASER - QUARTZ [Q 5]
Q 5 est asservi sur Q 1

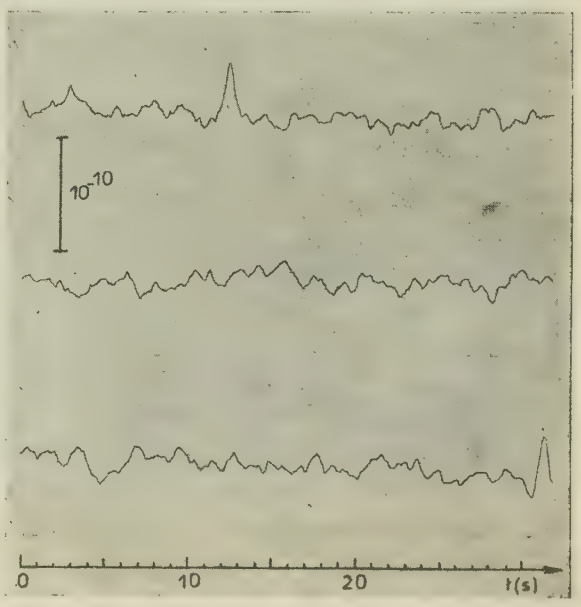


Fig. 35

Fluctuations de fréquence du battement d'un Maser
avec l'harmonique d'un quartz à 5 Mhz

a) Quartz Q 5 b) et c) Q 5 est asservi sur l'harmonique d'un quartz à 1 Mhz [Q 1]

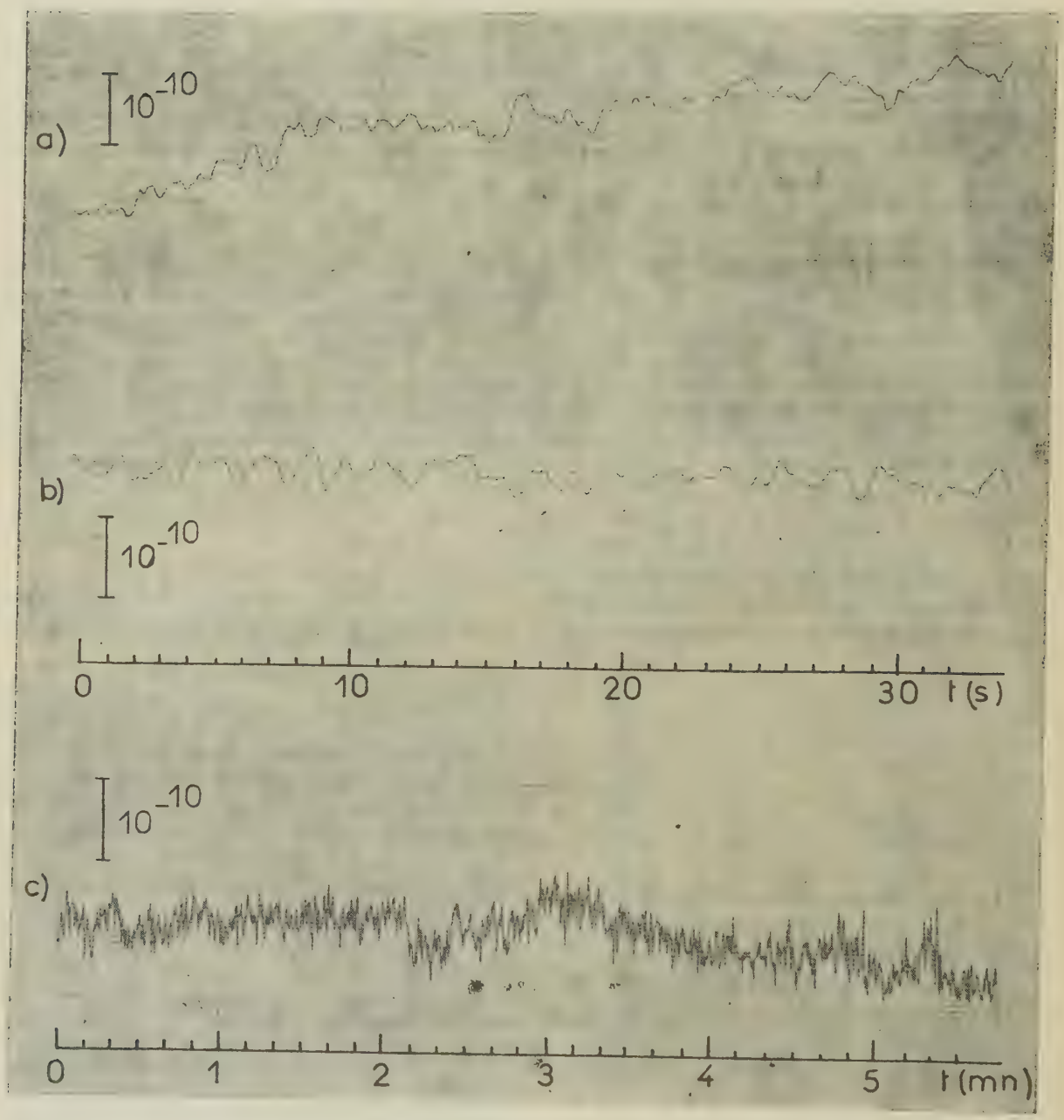
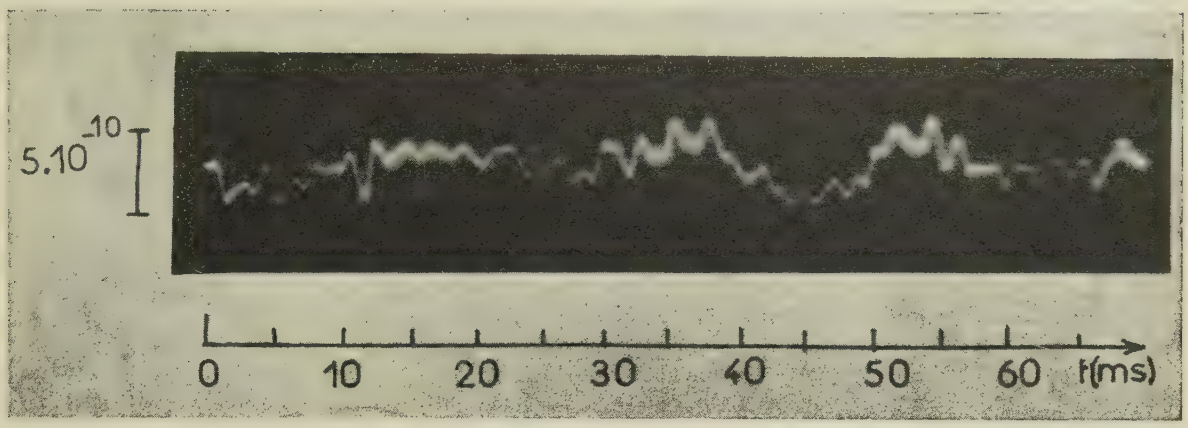
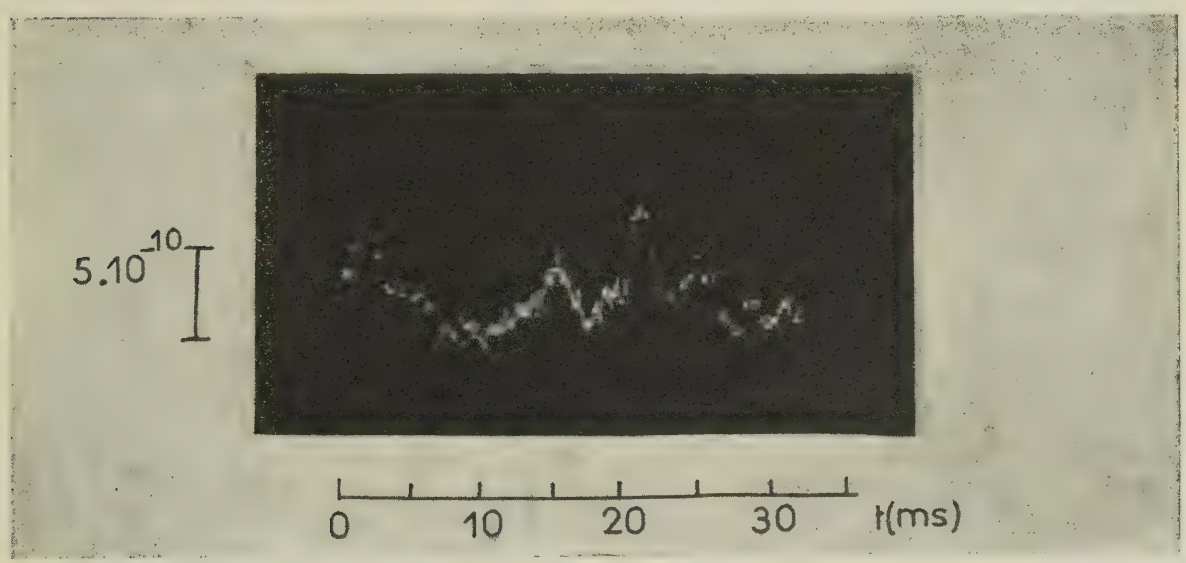


Fig. 34

Fluctuations de fréquence du quartz à 5 Mhz [Q 5]
Observation oscillographique



a) Constante de temps τ = 4 ms



b) τ = 100 µs

Fig. 36

Fluctuations de fréquence du battement d'un Maser avec l'harmonique de quartz

a) Quartz à 5 Mhz Q 5 b) Quartz à 5 Mhz Q 5 a

c) Q 5 est asservi sur Q 5 a

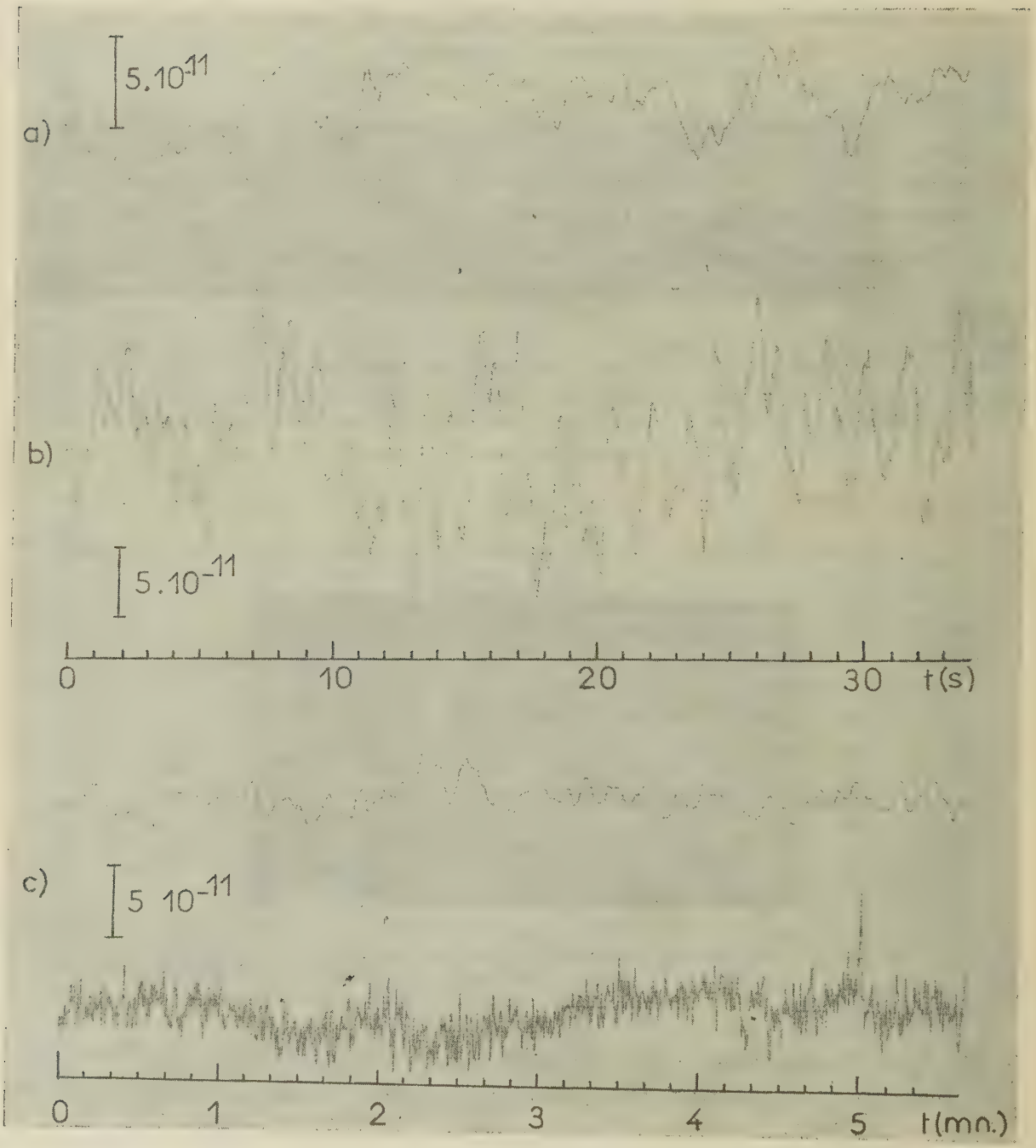
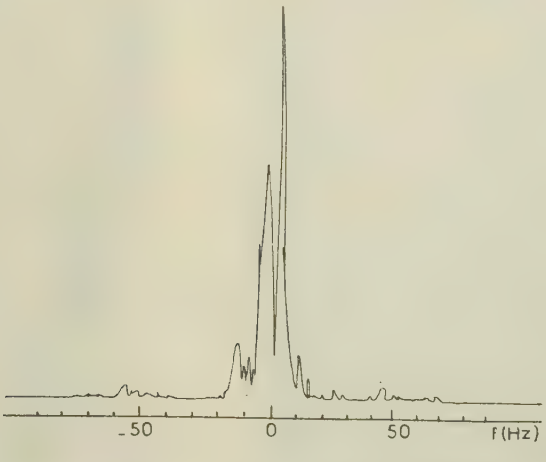


Fig. 37

Spectre et fluctuations de fréquence dún quartz à 5Mhz
asservi sur l'harmonique dún signal à 100 Khz



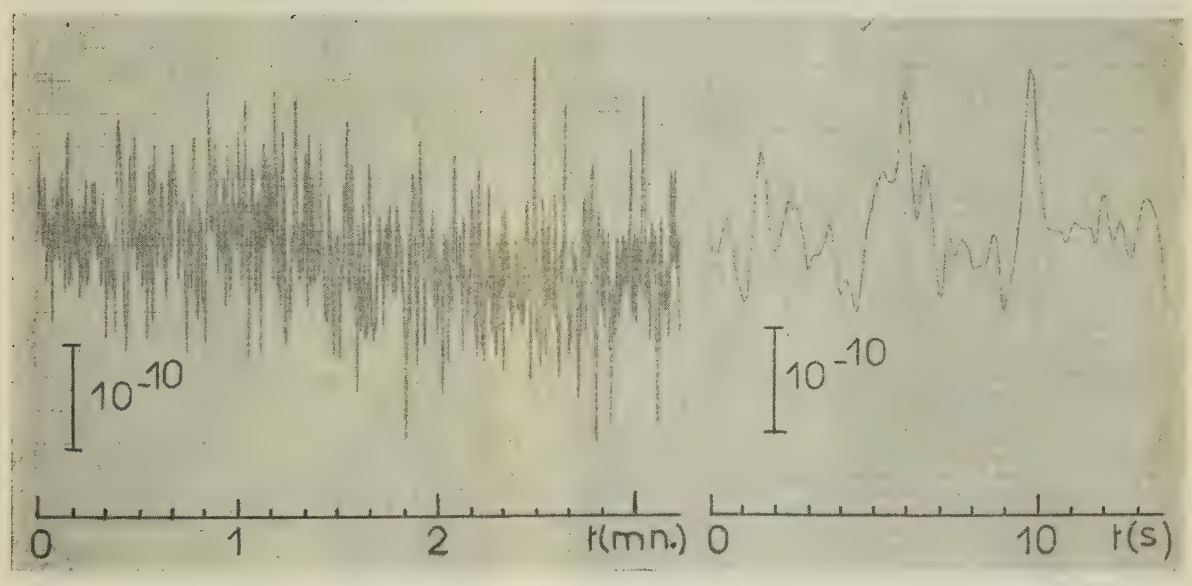
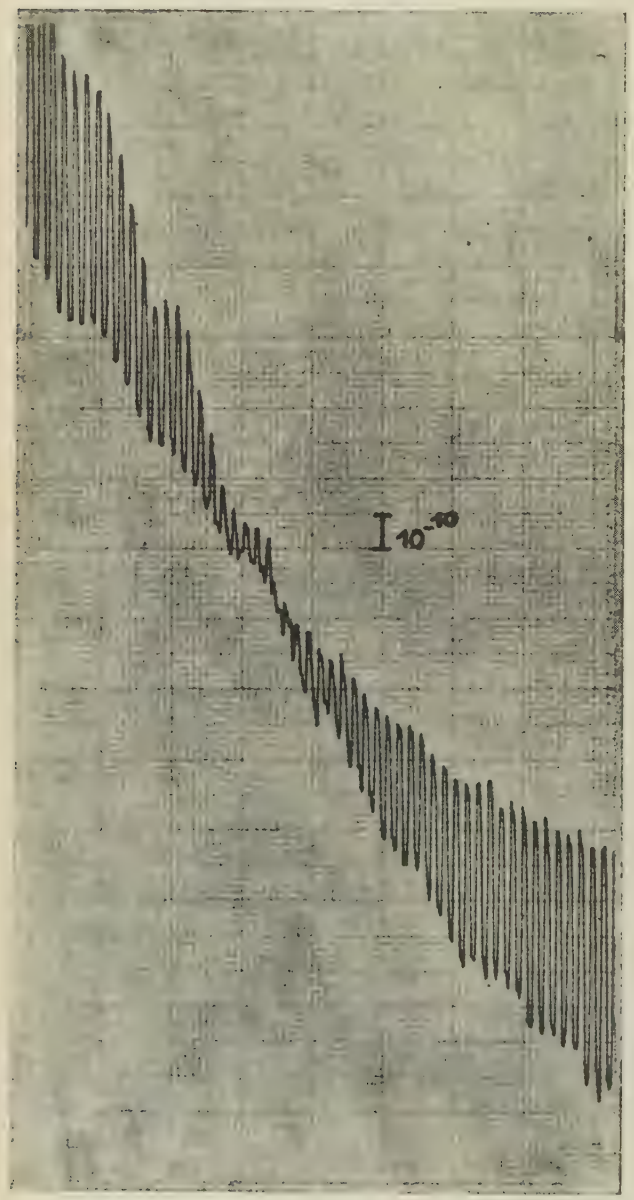


Fig. 38

EFFET ZEEMAN

Battement Maser-Quartz



Battement Maser - Maser

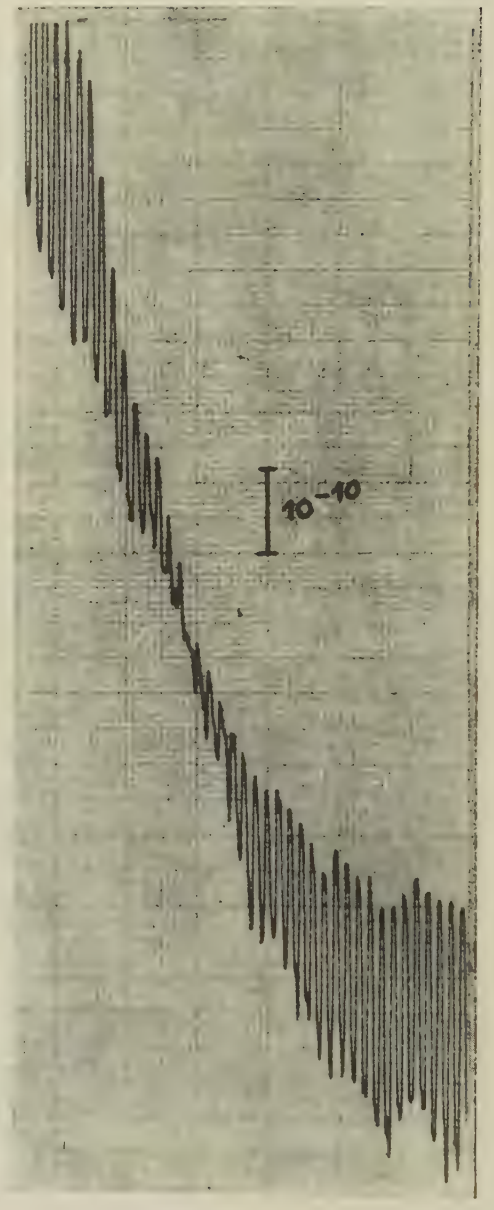


Fig. 39

CONCLUSION

Les résultats de notre étude nous ont permis non seulement de réaliser un oscillateur à quartz permettant la comparaison avec les masers à ammoniac, mais également ont facilité la mise en œuvre d'un critère à effet Zeeman, mise en œuvre qui est menée en collaboration avec d'autres chercheurs du Laboratoire. La relation fondamentale :

$$(f_m - f_o)/f_o = (f_c - f_o)\,\Delta f_m/\Delta f_c$$

liant les fréquences f_m, f_o et f_c du Maser, de la raie de l'ammoniac et de la cavité respectivement, montre que l'application d'un champ magnétique, dont l'effet principal est d'augmenter la largeur Δf_m de la raie d'absorption de l'ammoniac, la largeur Δf_c de la cavité ne variant pas, permet de moduler en fréquence le Maser et, par suite, le battement de deux Masers (un des Masers n'étant pas modulé) ou le battement entre un Maser et un quartz. Cette modulation change de phase suivant que la fréquence de la cavité du Maser f_c est supérieure ou inférieure à celle de la raie d'absorption de l'ammoniac et s'annule lorsque la fréquence de la cavité est exactement celle de l'ammoniac. C'est cette fréquence qui est prise comme fréquence d'oscillation du Maser. La figure 39 montre la modulation lorsqu'on fait varier lentement la fréquence de la cavité. Les résultats préliminaires obtenus en collaboration avec M. Bardèche dans notre Laboratoire sont très encourageants et permettent de reproduire la fréquence du Maser à quelques 10^{-10} près. Il faut souligner que la haute pureté spectrale du battement quartz-Maser que nous avons pu obtenir donne une très grande précision dans la détermination de la fréquence pour laquelle la modulation du Maser s'annule (10^{-11}) et l'on peut espérer qu'après élimination d'un certain nombre d'effets parasites (effets dont l'étude est en cours) qui font varier la fréquence ainsi déterminée, on pourra bénéficier complètement de la précision de détermination et reproduire la fréquence du Maser à 10^{-11} près, ce qui mettrait le Maser à ammoniac ordinaire au premier rang des étalons secondaires de fréquence.

BIBLIOGRAPHIE

1. P.-M. Duffieux. — *L'intégrale de Fourier et ses applications à l'optique*, 1946.
2. A. Blanc-Lapierre. — *Propriétés statistiques du bruit de fond*, 1961.
3. R. B. Blackmann, J. W. Tuckey. — Measurement of power spectra, *Dover Publication*.
4. J. A. Barnes, R. C. Mockler. — The power spectrum and its importance in precise frequency measurement, *NBS Report*, 1960.
5. J. Weber. — *T. I. R. E., P. G. E. D.*, 3, juin 1953.
6. J. P. Gordon. — *Physical Review*, 91, 1253 (1955).
7. J. C. Helmer. — *M. L.Report*, n° 327, Stanford University (1956).
8. J. C. Helmer, F. B. Jacobus, P. A. Sturrock. — *Journal of applied Physics*, 31, 3, mars 1960.
9. M. Hirono. — *Journal of Radio Research Laboratories*, juillet 1959.
10. K. Shimosda, T. C. Wang, C. H. Townes. — *Physical Review*, 102, 5, juin 1956.
11. J. C. Helmer. — *Journal of Applied Physics*, vol. 30, n° 1, juin 1959.
12. K. Shimoda. — *Journal of the Physical Society of Japan*, vol. 12, 9, septembre 1957.
13. Une bibliographie très complète concernant les Masers a été dressée par E. Mount et B. Berg. —*I. R. E. T., M. T. T.*, 8.230 (1960). Nous nous référons particulièrement aux articles déjà cités (6-12) ainsi qu'à (14) (17) (19) (21).
14. K. Shimoda. — *Journal of The Physical Society of Japan*, vol. 13, 8, août 1958.
15. Ch. Townes, A. L. Schalow. — *Microwawe spectroscopy*, 1955.
16. K. Shimoda. — *I. R. E. T.*, vol. I, 11, décembre 1962.
17. J. de Prins. — *Thèse*, Université de Neuchâtel, 1961.
18. J. Hardin. — *Thèse 3e Cycle*, Besançon, 1962.
19. J. P. Gordon, H. J. Zeiger, Ch. Townes. — *Physical Review*, vol. 99, p. 1264, (1955).
20. P. Grivet, A. Blaquiere. — Proceeding of the Symposium on optical Masers, *Polyt. Inst. of Brooklyn*, 4, 1963.
21. K. Shimoda, H. Takahasi, Ch. Townes. — *Journal of the Physical Society of Japan*, vol. 12, n° 6, juin 1957.
22. P. Grivet et A. Blaquière. — *Le bruit de fond*, Masson, 1958.
23. M. Olivier. — *C. R. Académie Sciences*, t. 256, p. 4376-77, mai 1963.
24. M. W. P. Strandberg. — *P. I. R. E.*, juillet 1955.
25. A. Blaquière. — *Annales Radioélectricité*, p. 36-81, 1953.
26. A. Blaquière. — *Annales Radioélectricité*, p. 153-179, 1953.
27. E. Terman. — *T. A. I. E. E.*, vol. 57, p. 640, novembre 1938.
28. S. C. Rice. — *Bell S. T. J.*, 23, p. 282-332, juillet 1944.
29. Page. — *Journal of Research N. B. S.*, avril 1956, p. 179-182.
30. Leenov, Uhlir. — *P. I. R. E.*, p. 1724, 1959.

ANNEXE

SCHÉMAS ÉLECTRONIQUES

OSCILLATEUR A QUARTZ A 5 MHZ [Q 5]

PREAMPLIFICATEUR

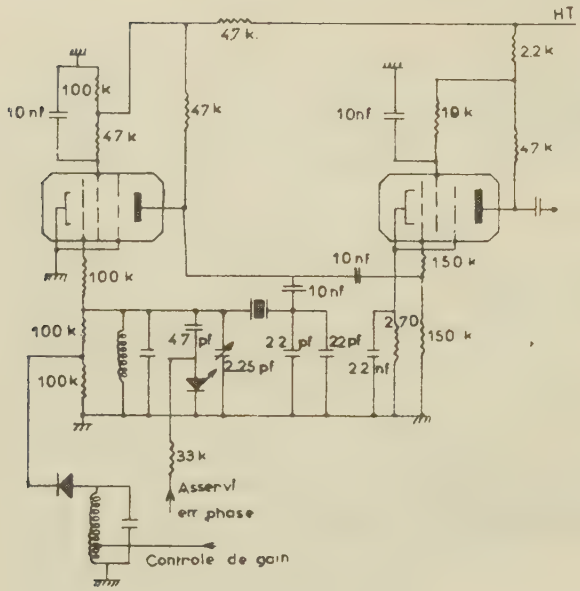


Fig. I

ANALYSEUR DE SPECTRES

Oscillateur local et mélangeur

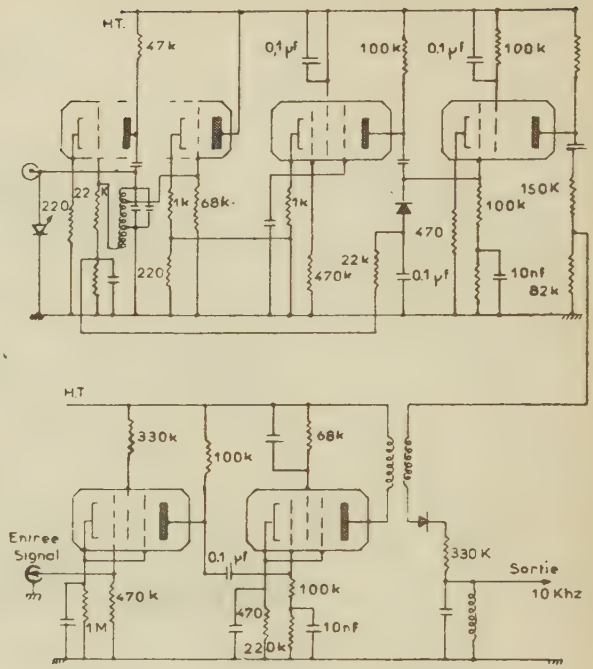


Fig. III

Amplificateur de l'oscillateur à 5 Mhz [Q 5]

Système d'asservissement

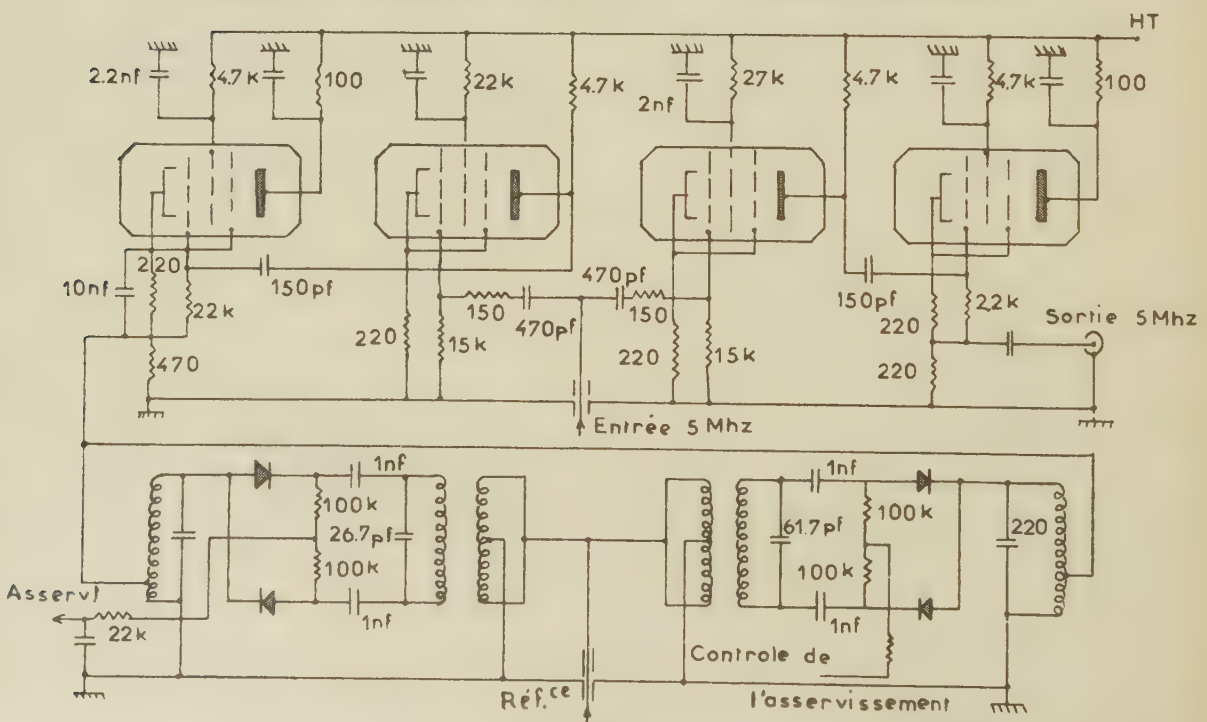


Fig. II

ANALYSEUR DE SPECTRE

Amplificateur Ecreteur 10 Khz Filtre et Discriminateur

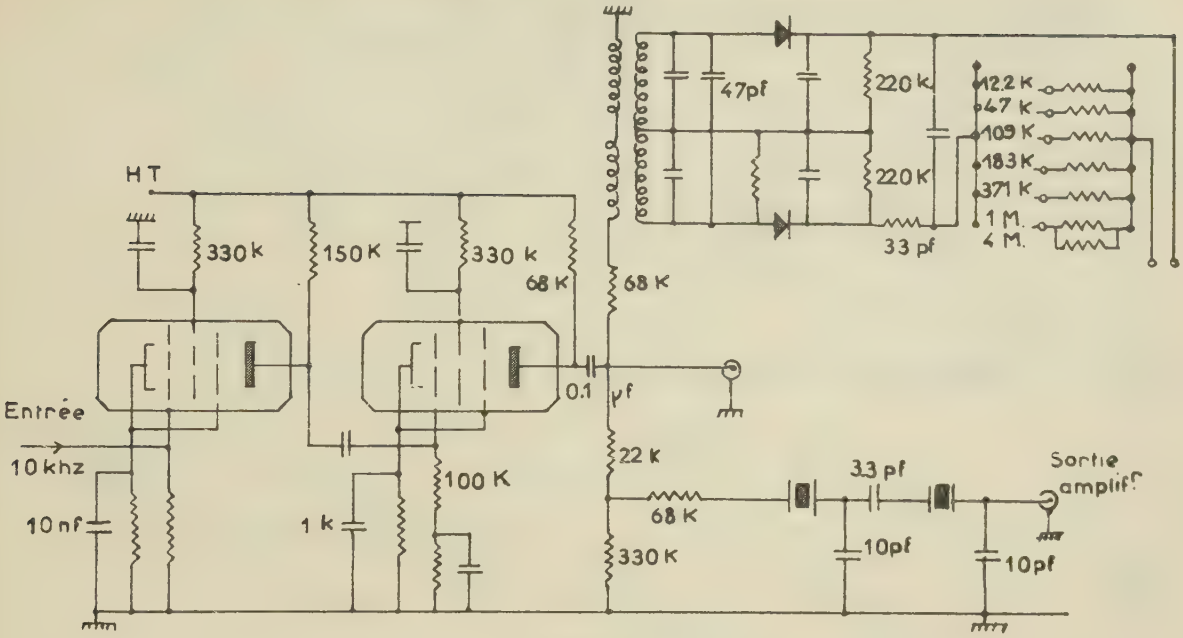


Fig. IV

ANALYSEUR DE SPECTRES

Amplification linéaire et Détection

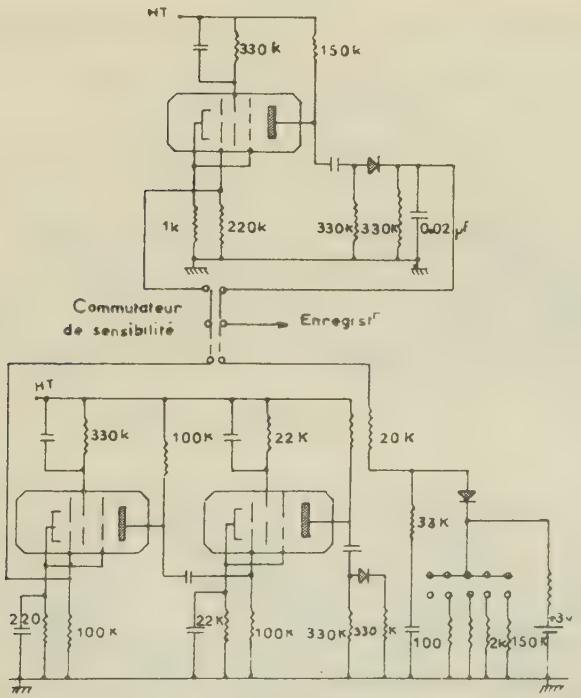


Fig. V

GENERATEUR DE TENSION DE BALAYAGE EN FREQUENCE

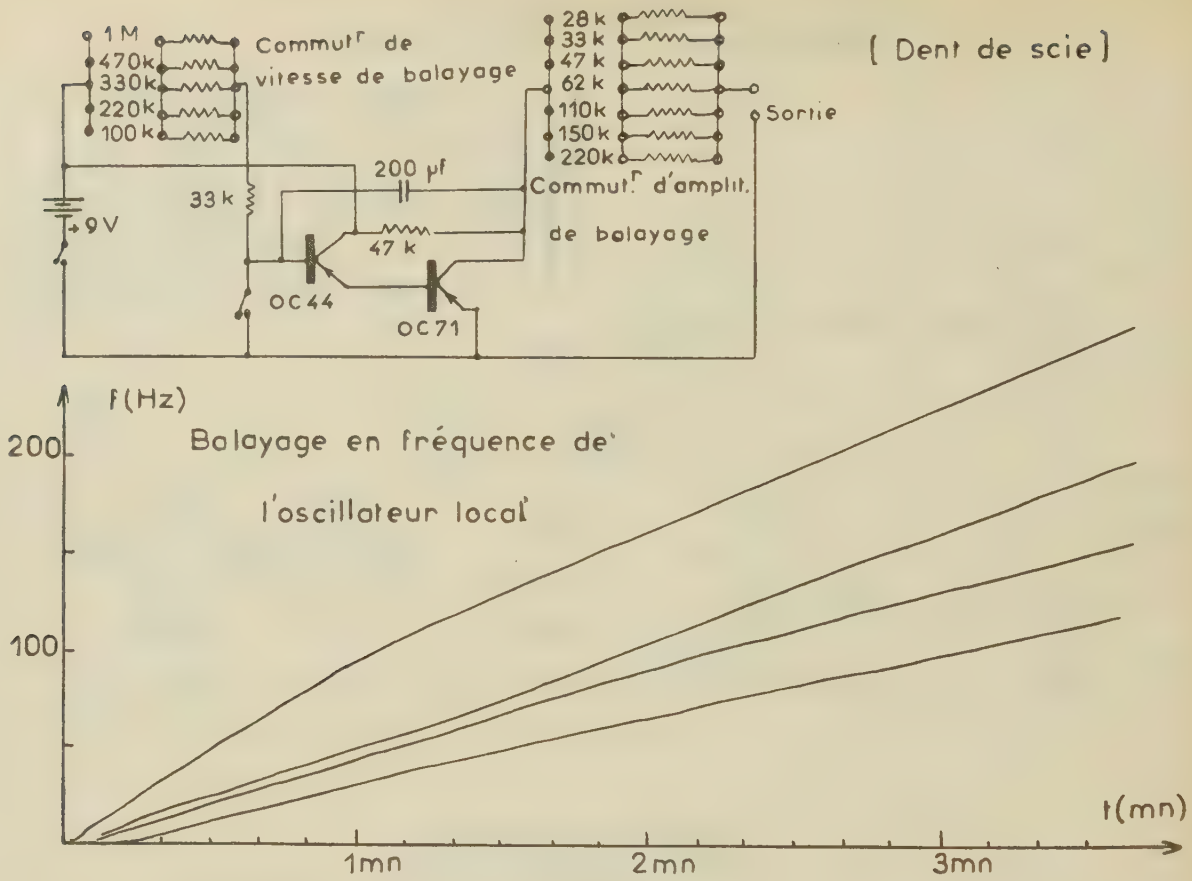


Fig. VI

CHAINE DE MULTIPLICATION 5 - 225 MHZ

Montage symétrique

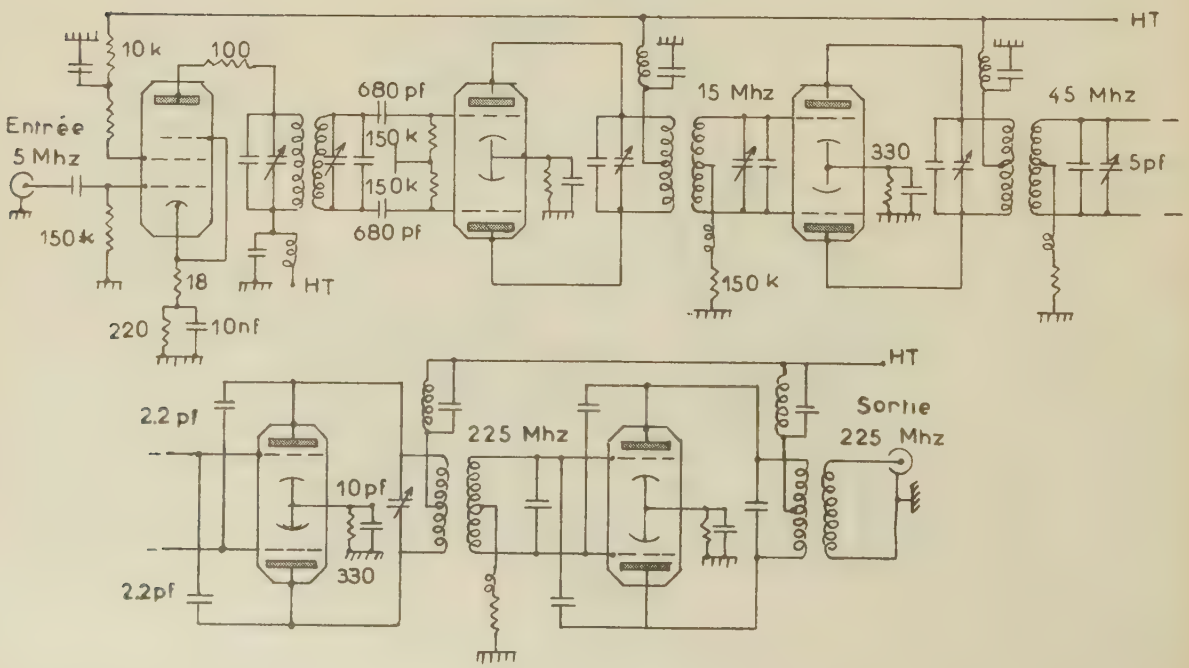


Fig. VII

CHAINE DE MULTIPLICATION 5 - 225 MHZ

Montage à pentodes

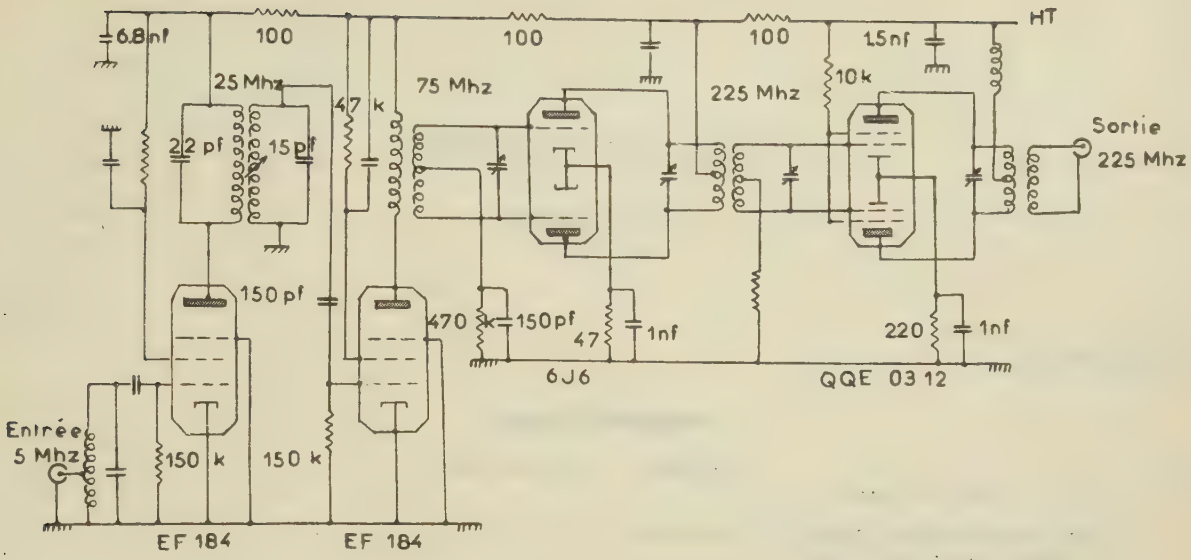


Fig. VIII

Mesure des fluctuations de phase des chaines de multiplication de fréquence

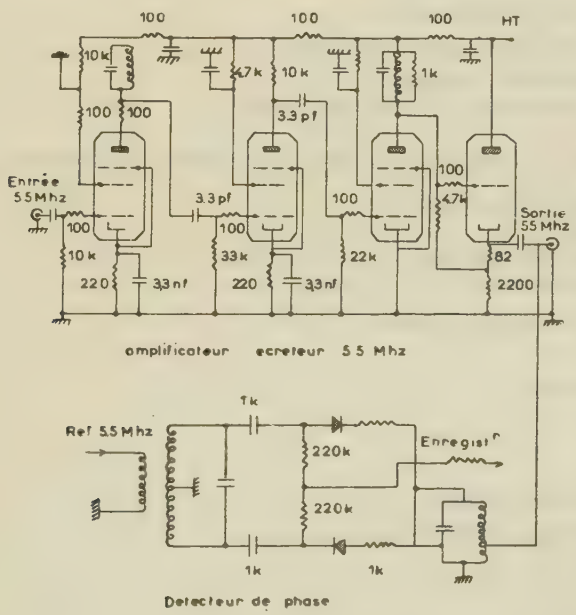


Fig. IX

TABLE DES MATIÈRES

Page

INTRODUCTION 1

PREMIÈRE PARTIE

CHAPITRE I. — GÉNÉRALITÉS

A. — Etude des spectres.

— Définition et propriétés du spectre de puissance 2
— Fréquence instantanée et spectre 5

B. — Rappel sur le Maser.

— Principe du Maser 6
— Fréquence d'oscillation 8
— Entraînements de fréquence 9
— Bruit et largeur de raie 11

C. — Analyse spectrale.

I. — Analyseur de spectre 12

II. — Transfert en radiofréquence d'un signal hyperfréquence par un analyseur de spectre à Maser . . 14
a) Méthode du Klystron auxiliaire 15
b) Méthode de l'accrochage en phase 16

III. — Multiplication de fréquence et spectre de puissance 17
A) Action sur les raies de modulation 17
B) Action de la multiplication sur la largeur de raie 19

CHAPITRE II. — RÉALISATION DE L'ANALYSEUR DE SPECTRES A MASER

A. — Les chaînes de multiplication.

1° Principe et réalisation 20
2° Bruit des multiplicateurs de fréquence. 21
3° Mesure des fluctuations de phase 23

B. — L'analyseur de spectre à Maser.

a) Le Maser :

1° Caractéristiques générales 28
2° Le gicleur. 28
3° Le focaliseur 29
4° La cavité 29
5° La détection. 29
6° Bruit du Maser. Etude expérimentale 29

b) Caractéristiques de l'analyseur de spectres :

1° Caractéristiques générales 31
2° Balayage en fréquence. 32
3° Filtre analyseur 32
4° Détection 32
5° Enregistrement des spectres. 34

DEUXIÈME PARTIE

I. — Les oscillateurs à quartz 35

II. — Etude expérimentale des spectres d'oscillateurs à quartz 36
Etude des raies latérales 41

III. — Etude de l'asservissement d'un oscillateur à quartz 42
Réalisation pratique. 43

IV. — Spectres et fluctuations de fréquence 44

CONCLUSION 51

BIBLIOGRAPHIE 52

ANNEXE. — Schémas 53

DEUXIÈME THÈSE

EFFET ZEEMAN SUR LE SPECTRE D'INVERSION DE L'AMMONIAC

N° d'ordre 13

Vu et approuvé

Besançon, le 18 septembre 1964

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

R. JACQUEMAIN.

Vu et permis d'imprimer

22 septembre 1964

Le Recteur,

H. GAUTHIER.

Imprimerie Néo-Typo - Besançon

NEO-TYPO - Besançon